Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 6

УДК 517.537 **МАТЕМАТИКА**

С. В. БОЧКАРЕВ

О БАЗИСЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ЗАМКНУТОМ КРУГЕ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ВНУТРИ НЕГО

(Представлено академиком С. М. Никольским 11 II 1974)

Обозначим через A банахово пространство комплекснозначных функций, непрерывных в замкнутом единичном круге и аналитических в открытом единичном круге. Норма функции $f\in A$ определяется следующим образом:

$$\|f\| = \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

С. Банах [1] поставил вопрос о том, существует ли в пространстве A базис. В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос.

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Франклина, определенная на $[0, 2\pi]$. Система Франклина является базисом в пространстве непрерывных функций (см. [2, 3]).

Определим систему 2π-периодических непрерывных функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$F_n(x) = \begin{cases} f_n(2x) & \text{при} \quad x\in[0,\pi), \\ f_n(-2x) & \text{при} \quad x\in[-\pi,0). \end{cases} \tag{1}$$

Функции $F_n(x)$ четны и $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = 0$ при $n\geqslant 1$. Обозначим через $\tilde{F}_n(x)$ функцию, сопряженную к функции $F_n(x)$. Функции $\tilde{F}_n(x)$ нечетны.

Положим

$$g_0(x) = \frac{1+i}{2\sqrt{\pi}}, \quad g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_n(x) + i\tilde{F}_n(x)), \quad n\geqslant 1,$$
$$G_n(z) = G_n(r\cdot e^{ix}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)\cdot P(r, t-x)\,dt, \tag{2}$$

где $P(r, t)$ — ядро Пуассона.

Справедлива

Т е о р е м а. *Система функций $\{G_n(z)\}_{n=}^{\infty}$ образует базис в пространстве A.*

Приведем с х е м у д о к а з а т е л ь с т в а этой теоремы. Пусть функция $\Phi(z)\in A$. Тогда на границе единичного круга

$$\Phi(e^{ix}) = u(x) + iv(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — вещественные непрерывные 2π-периодические функции $v(x) = \tilde{u}(x) + \alpha$, α — вещественное число.

Разложим функцию $\Phi(e^{ix})$ в ряд по системе $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Имеем

$$\Phi(e^{ix}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x), \quad c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{ix})\overline{g_n(x)}\,dx,$$

или (см. (2))

$$\Phi(e^{ix}) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[u(x)+iv(x)]dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(u,F_n)+i(v,F_n)]\cdot F_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[i(u,F_n)-(v,F_n)]\cdot\tilde{F}_n(x). \qquad (3)$$

Установим, что ряд

$$\Sigma^{(1)} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}(u,F_n)F_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}(v,F_n)\tilde{F}_n(x) \qquad (4)$$

равномерно сходится к функции $u(x)$.

Разложим функции $u(x)$ и $v(x)$ на четную и нечетную компоненты:

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x), \quad v(x)=v_1(x)+v_2(x), \qquad (5)$$

где $u_1(x)$ и $v_1(x)$ четны, $v_2(x)$ и $u_2(x)$ нечетны.

Ряд (см. (1))

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_1(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}(u_1,F_n)\cdot F_n(x)$$

равномерно сходится к функции $u_1(x)$.

Обозначим

$$S_n(v_1,x)=\sum_{k=0}^{n}(v_1,F_k)F_k(x). \qquad (6)$$

Установим, что имеет место неравенство

$$\|\tilde{S}_n(v_1,\ x)\|\leqslant B(\|v_1\|+\|\tilde{v}_1\|). \qquad (7)$$

Через B обозначается положительная постоянная, которая может быть различной в разных формулах.

Функция

$$K_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}F_k(x)\cdot F_k(y)$$

при $n=2^p+q$, $1\leqslant q\leqslant 2^p$, по каждому из переменных x, y есть кусочно-линейная функция. Поэтому справедливо неравенство

$$\int_0^{1/n}\left|\frac{K_n(x+t,y)-K_n(x-t,y)}{t}\right|dt\leqslant Bn\int_{-8/n}^{8/n}|K_n(x+t,y)|\,dt. \qquad (8)$$

Поскольку функции Лебега для системы Франклина равномерно ограничены, то из неравенства (8) следует

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1/n}\left|\frac{K_n(x+t,y)-K_n(x-t,y)}{2\operatorname{tg}{}^1/_2 t}\right|dt\,dy\leqslant B. \qquad (9)$$

Обозначим через $\Lambda_{n,x}(y)$ такую функцию, определенную на единичной окружности, что

$$\Lambda_{n,x}(y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad |x-y|<1/n,\\ {}^1/_2\operatorname{ctg}{}^1/_2(y-x) & \text{при} \quad |x-y|\geqslant 1/n.\end{cases} \qquad (10)$$

Представим $\tilde{S}_n(v_1, x)$ в следующем виде (см .(6), (10)):

$$-\pi\tilde{S}_n(v_1, x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t, y)\Lambda_{n,x}(t)\,dt - \Lambda_{n,x}(y)\right\} v_1(y)\,dy +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_{n,x}(y) v_1(y)\,dy + \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{0}^{1/n} \frac{K_n(x+t, y) - K_n(x-t, y)}{2\operatorname{tg} {}^1/{}_2 t}\,dt\right\} v_1(y)\,dy. \quad (11)$$

Пусть

$$\Lambda_{n,x}(t) = \Lambda_{n,x}^{(1)}(t) + \Lambda_{n,x}^{(2)}(t), \quad (12)$$

где $\Lambda_{n,x}^{(1)}(t)$ — четная функция и $\Lambda_{n,x}^{(2)}(t)$ — нечетная.

Так как (см. ([4]))

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t, y)\Lambda_{n,x}^{(1)}(t)\,dt - \Lambda_{n,x}^{(1)}(y)\right| dy \leqslant B w_1\left(\frac{\pi}{n}, \Lambda_{n,x}^{(1)}\right) \leqslant B, \quad (13)$$

где $w_1(\delta, \Lambda_{n,x}^{(1)})$ — модуль непрерывности функции $\Lambda_{n,x}^{(1)}(y)$ в метрике $L_1(0, \pi)$, и (см. ([5]) стр. 154).

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_{n,x}(y) v_1(y)\,dy\right| \leqslant B(\|v_1\| + \|\tilde{v}_1\|), \quad (14)$$

то, объединяя соотношения (9) и (11)—(14), получаем неравенство (7).

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой полином по системе $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, что

$$\|v_1 - P\| \leqslant \varepsilon, \quad \|\tilde{v}_1 - \tilde{P}\| \leqslant \varepsilon. \quad (15)$$

Поэтому для достаточно больших n выполняется неравенство (см. (6), (7), (15))

$$\|\tilde{S}_n(v_1) - \tilde{v}_1\| = \|\tilde{S}_n(v_1 - P) + \tilde{P} - \tilde{v}_1\| \leqslant B\varepsilon. \quad (16)$$

Поскольку $\tilde{v}_1(x) = -u_2(x)$, то (см. ([4]), (5), (16)) ряд (4) равномерно сходится к $u(x)$.

Аналогично доказывается, что ряд

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} (v, F_n)\cdot F_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (u, F_n)\cdot \tilde{F}_n(x)$$

равномерно сходится к функции $v(x)$.

Таким образом, ряд (3) равномерно сходится к функции $\Phi(e^{ix})$ и, в силу ортогональности системы $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, это разложение единственно. Теорема доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
31 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. Banach*, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [2] *Ph. Franklin*, Math. Ann., v. 100, 522 (1928). [3] *Z. Ciesielski*, Studia, Math., v. 23, 141 (1963). [4] Idem, v. 27, 289 (1966). [5] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.