Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 517.514 *МАТЕМАТИКА*

И. А. КИПРИЯНОВ, Н. А. КАЩЕНКО

ОБ ОПЕРАТОРЕ ОСРЕДНЕНИЯ, СВЯЗАННОМ С ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ

(Представлено академиком С. М. Никольским 22 II 1974)

1. Пусть E_{n+2}^{+} обозначает эвклидово пространство точек (s, z_1, z_2) размерности $n+2$. Здесь $s=(s_1, \ldots, s_n)$ и $z_2>0$. Рассмотрим функцию $\omega_h(x, y, 0; s, z_1, z_2)$ двух точек $(x, y, 0)$ и (s_1, z_1, z_2) и численного положительного параметра h. Функцию $\omega_h=\omega_h(x, y, 0; s_1, z_1, z_2)$ будем называть осредняющим ядром, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) ω_h зависит только от h и r, где $r^2=|x-s|^2+|y-z_1|^2+z_2^2$;
2) $\omega_h>0$, если $r<h$, и $\omega_h=0$, если $r\geqslant h$;
3) ω_h бесконечно дифференцируема и четна по переменным y и z_2.
4) $\int\limits_{r<h} \omega_h(x, y, 0; s, z_1, z_2) z_2^{k-1} ds\, dz_1\, dz_2=1$.

Примером осредняющего ядра может служить функция

$$\omega_h=\begin{cases} \dfrac{C_k}{H_h^{(k)}} e^{-1/(h^2-r^2)}, & \text{если } r<h, \\ 0, & \text{если } r\geqslant h, \end{cases} \tag{1}$$

где $C_k=\dfrac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k)}$ (k — фиксированное положительное число) и $H_h^{(k)}$ — постоянная, равная

$$H_h^{(k)}=C_k \int\limits_{r<h} e^{-1/(h^2-r^2)} z_2^{k-1}\, ds\, dz_1\, dz_2. \tag{2}$$

Пусть Ω^+ — конечная область $(n+2)$-мерного эвклидова пространства, расположенная в полупространстве $z_2>0$ и прилегающая к гиперплоскости $z_2=0$. Пусть u — функция, суммируемая в Ω^+ с весом. Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$u_h(x, y)=C_k \int\limits_{\Omega^+} e^{-1/(h^2-r^2)} u(s, \sqrt{z_1^2+z_2^2})\, z_2^{k-1}\, ds\, dz_1\, dz_2. \tag{3}$$

Доопределяя u вне Ω^+ нулем и учитывая явное выражение для оператора обобщенного сдвига

$$T_y^t f(y)=C_k \int\limits_0^{\pi} f(\sqrt{y^2+t^2-2yt\cos\varphi}) \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi,$$

интеграл (3) может быть записан в виде

$$u_h(x, y)=\int\limits_{E_{n+1}^+} T_y^t e^{-1/(h^2-[(x-s)^2+t^2])} u(s, t) t^k\, ds\, dt=$$

$$=\int\limits_{\Omega^+} T_y^t \omega_h(x-s, t) u(s, t) t^k\, ds\, dt. \tag{4}$$

Интегральный оператор (4) назовем оператором осреднения, порожденным оператором обобщенного сдвига, а функцию u_h назовем осредненной функцией.

Имеют место следующие утверждения, характеризующие свойства оператора (4).

Теорема 1. *Если $u(x, y)$ непрерывна в Ω^+ и четна по y, то функция $u_h(x, y)$ стремится к $u(x, y)$ при $h\to 0$ равномерно во всякой внутренней подобласти области Ω^+.*

Теорема 2. *Если $u(x, y)\in\mathscr{L}_{p,k}$, то*

$$\|T_t^y u(x-s, t)\|_{\mathscr{L}_{p,k}}\leqslant C\|u\|_{\mathscr{L}_{p,k}}. \tag{5}$$

Теорема 3. *Если $u(x, y)\in\mathscr{L}_{p,k}(\Omega^+)$, то*

$$\int\limits_{\Omega^+}|u_h(x, y)|^p y^k\,dx\,dy\leqslant C\int\limits_{\Omega^+}|u(s, t)|^p t^k\,ds\,dt. \tag{6}$$

Теорема 4. *Если $u(x, y)\in\mathscr{L}_{p,k}(\Omega^+)$, то*

$$\lim_{h\to\infty}\|u_h-u\|_{\mathscr{L}_{p,k}(\Omega^+)}=0. \tag{7}$$

Теорема 5. *Множество функций, бесконечно дифференцируемых, четных по y и равных нулю в пограничной полосе Ω_h^+, плотно в $\mathscr{L}_{p,k}(\Omega^+)$.*

Через Γ^+ обозначается граница области Ω^+, расположенная в полупространстве $y>0$. Под Ω_h^+ понимается множество точек области Ω^+, расстояние которых до Γ^+ не превосходит некоторого положительного числа h.

2. Укажем на некоторые применения введенного выше интегрального оператора (4).

Определение. Пусть функции $\varphi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ четны по y и суммируемы с весом y^k по любой внутренней подобласти Ω_1^+ области Ω^+. Пусть для любой s раз непрерывно дифференцируемой, финитной вблизи Γ^+ и четной по y функции $\psi(x, y)$ функции φ и χ удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_{\Omega^+}\chi(x, y)\varphi(x, y)\,y^k\,dx\,dy=(-1)^l\int\limits_{\Omega^+}\varphi\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r\psi(x, y)\,y^k\,dx\,dy,$$

где $\mathscr{B}_y^r$ — итерации сингулярного дифференциального оператора Бесселя

$$\mathscr{B}_y=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда функцию $\chi(x, y)$ назовем обобщенной производной вида $\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r$ от функции $\varphi(x, y)$ в области Ω^+.

Если же при определении обобщенной производной $\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r$ прибегнуть к точке зрения на производную как на оператор в пространстве $\mathscr{L}_{2,k}(\Omega^+)$ ($\mathscr{L}_{2,k}$ — пространство квадратично суммируемых функций с весом y^k), то из такого определения будет автоматически вытекать квадратичная суммируемость с весом y^k как обобщенных производных вида $\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r$, так и функций, дифференцируемых обобщенным образом.

Теорема 6. *Пусть функция $u(x, y)$, четная по y, имеет в Ω^+ обобщенную производную $\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r u(x, y)$ порядка $s=2r+l$.*

Тогда в любой точке внутри $\Omega^+-\Omega_h^+$

$$(\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r u(x, y))_h=\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r u_h(x, y), \tag{8}$$

где Ω_h^+ обозначает пограничную полосу ширины h.

Теорема 7. *Пусть Ω_1^+ — внутренняя подобласть области Ω^+. Если $v(x, y)$ есть обобщенная производная $\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r$ от $u(x, y)$, т. е. $v(x, y)=\mathscr{D}_x^l\mathscr{B}_y^r u(x, y)$ в Ω^+, то $v(x, y)$ будет такой же обобщенной производной от $u(x, y)$ в Ω_1^+.*

Теорема 8. *Пусть $\varphi(x, y)$ суммируема в Ω^+ с весом y^k. Пусть $\psi(x, y)$ непрерывна и обращается в нуль вблизи Γ^+. Пусть последовательность $\varphi_k(x, y)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируема в Ω^+ и для нее*

$$\lim \int_{\Omega^+} \varphi_k(x, y)\psi(x, y)y^k\,dx\,dy = \int_{\Omega^+} \varphi(x, y)\psi(x, y)y^k\,dx\,dy. \tag{9}$$

Если, кроме того,

$$\int_{\Omega^+} |\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{B}_y^\beta \varphi_k(x, y)|^p y^k\,dx\,dy \leqslant C, \tag{10}$$

то существует обобщенная производная $\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{B}_y^\beta \varphi(x, y)$.

Следствие. *Если множество производных вида $\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{B}_y^\beta$ от осредненных функций слабо компактно, то данная функция имеет обобщенную производную вида $\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{B}_y^\beta$.*

Теорема 9. *Пусть u, $\partial u/\partial y$, $\mathcal{B}u \in \mathcal{L}_{p,k}(\Omega^+)$ и пусть v, $\partial v/\partial y$, $\mathcal{B}v \in \mathcal{L}_{q,k}(\Omega^+)$, где $1/p+1/q=1$ и $\mathcal{B}$ — оператор Бесселя.*

Тогда uv имеет обобщенную производную

$$\mathcal{B}(uv) = v\mathcal{B}u + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\mathcal{B}v. \tag{11}$$

Другие важные приложения оператора осреднения (4), порожденного обобщенным сдвигом, были даны Г. Л. Чернышовым [1] при доказательстве однозначной разрешимости соответствующей задачи Коши с сингулярным гиперболическим оператором.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
20 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. Л. Чернышов*, О задаче Коши с сингулярным гиперболическим оператором, Автореф. кандидатской диссертации, Воронеж, 1973.