Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 517.946.4

МАТЕМАТИКА

М. Е. ЛЕРНЕР

О ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ С ОБОБЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 13 III 1974)

1. Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L}_0[u]\equiv u_{xy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=0 \qquad (\mathscr{L}_0)$$

в области Δ_0, ограниченной отрезком OA характеристики $y=0$ ($O(0, 0)$, $A(0, l)$, $l>0$) и простой дугой $\overset{\frown}{OA}$, расположенной в нижней полуплоскости и пересекающей прямую $y=-\delta$ только в двух точках ($0<\delta<\varepsilon$, ε сколь угодно мало); a, a_x, b, $c\in C^{(0)}(\Delta_0\diagdown A)$. Область Δ_0 будем обозначать через Δ, если $\overset{\frown}{OA}$ есть либо ломаная $OCEA$ (область Δ_1, $C(0, h_0)$, $E(l, h_0)$, $h_0=\text{const}<0$), либо состоит из отрезка AC характеристики $x=l$ ($C(l, h_0)$) и дуги OC со строго убывающей ординатой (область Δ_2), которая в точке O может касаться (область Δ_2') или не касаться (область Δ_2'') характеристики $x=0$.

Будем говорить, что для уравнения $(\mathscr{L}_0)$ в области Δ_0 с «данными» в точке O в некотором классе $[K]$ его решений имеет место характеристический принцип слабого локального экстремума, если, возможно при некоторых дополнительных условиях, справедлива

Теорема. *Пусть* $u(x, y)$ — *произвольное решение класса* $[K]$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}|u(x, 0)|=|u(x_0, 0)|\neq 0$, $0<x_0<l$. *Тогда* $u(x_0, 0)\cdot u_y(x_0, 0)>0$.

Функцию $u(x, y)$ будем считать решением класса $[K_0]$ уравнения $(\mathscr{L}_0)$, если $\mathscr{L}_0(u)\equiv 0$ в Δ_0, $u\in C^{(1)}(\bar{\Delta}_0\diagdown A)$, u_{xy}, $u_{yx}\in C^{(0)}(\Delta_0)$; $u(0, 0)=u_y(0, 0)=0$.

Лемма 1. *Для уравнения* $(\mathscr{L}_0)$ *в области* Δ_0 *с «данными» в точке* O *в классе* $[K_0]$ *имеет место характеристический принцип слабого локального экстремума, если на характеристике* OA *справедливо одно из неравенств*

$$\theta(x)=\mu(x)-\int_0^x\lambda(t)|c_2(t)|dt>0, \qquad (C)$$

$$\theta(x)-\int_0^x\lambda(t)c_1(t)>0, \qquad (C')$$

$$\mu(x)-\int_0^x\lambda(t)|\tilde{c}(t)|dt>0, \qquad (C'')$$

$$\lambda(x)a(x,0)+\int_0\lambda(t)|\tilde{h}(t)|dt<0; \qquad (D)$$

здесь

$$\lambda(x)=\exp\left\{\int_0 b(t,0)dt\right\},\quad \mu(x)=-a(0,0)-2\int_0\lambda(t)|h_2(t)|dt.$$

$$c(x, 0)=\tilde{c}(x)=c_1(x)+c_2(x),\qquad h(x, 0)=\tilde{h}(x)=a_x(x, 0)+$$
$$+a(x, 0)b(x, 0)-c(x, 0)=h_1(x)+h_2(x);$$
$$h_1(x)\leqslant 0,\ c_1(x)\leqslant 0 \text{ при } 0\leqslant x<1.$$

Доказательство следует из соотношения вида (1) и (2) работы [1] и рассуждений, использованных при доказательстве леммы 1 из работы [2].

Можно показать, что с помощью мультипликативной подстановки уравнение $(\mathscr{L}_0)$ с a, a_x, b, $c\in C^{(0)}(\overline{\Delta}_0)$ преобразуется в уравнение того же вида, коэффициенты которого удовлетворяют неравенству (C'').

2. Рассмотрим уравнения

$$\Lambda[u]\equiv\frac{1-\operatorname{sgn}y}{2}u_{xy}+\frac{1+\operatorname{sgn}y}{2}u_{xx}+M(x,y)u_x+N(x,y)u_y+F(x,y)u=0, \tag{Λ}$$

$$\mathscr{L}[u]\equiv\frac{1-\operatorname{sgn}y}{2}u_{xy}+\frac{1+\operatorname{sgn}y}{2}(u_{xx}+u_{yy})+M(x,y)u_x+N(x,y)u_y+F(x,y)u=0 \tag{$\mathscr{L}$}$$

соответственно в областях $\Omega_*=\Omega_1\cup OA\cup\Delta$ и $\Omega=D_1\cup OA\cup\Delta$, где Δ — описанная выше область; M, M_x, N, $F\in C^{(0)}(\overline{\Delta})$; $F\leqslant0$ при $y>0$. Область Ω_1 ограничена прямолинейными отрезками OA, OB, AQ, BQ; $\sigma=OB\cup AQ$; $x_B=x_0=0$, $x_Q=x_A=l$, $y_B=y_Q$, причем в уравнении (Λ) M, N, $F\in C^{(0)}(\overline{\Omega}_1)$, $N<0$ в $\overline{\Omega}_1$. Область D_1 ограничена отрезком OA и простой дугой $\sigma=\widehat{OA}\subset\subset\{y>0\}$, причем в уравнении $(\mathscr{L})$ M, N, $F\in C^{(0)}(\overline{D}_1)$.

Задача $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $\Lambda[u]\equiv0$ в $\Omega_1\cup BQ\cup\Delta$;

2) $u\in C^{(0)}(\overline{\Omega}_1)\cap C^{(0)}(\overline{\Delta})\cap C^{(1)}[\overline{\Omega}_1\setminus(O\cup A)]\cap C^{(1)}(\overline{\Delta}\setminus A)\cap C^{(2)}(\Omega_1\cup A)$;

3) $u|_{\overline{OB}}=\varphi_1(y)$, $u|_{\overline{AQ}}=\varphi_2(y)$, $y|_{\overline{OC}}=\psi$; φ_1, $\varphi_2\in C^{(0)}$; $\psi\in C^{(1)}$;

4) $u(x;-0)=\alpha(x)u(x;+0)$, $0\leqslant x\leqslant l$; $u_y(x;-0)=\beta(x)u_y(x;+0)+\gamma(x)u(x;-0)$, $0<x<l$; $\alpha\in C^{(0)}[0,l]$, β, $\gamma\in C^{(0)}(0,l)$; $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma\leqslant0$, $\alpha(x)$ не убывает на $[0,l]$.

Задача $\mathscr{L}_{\alpha\beta\gamma}$. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $\mathscr{L}[u]\equiv0$ в $D_1\cup\Delta$;

2) $u\in C^{(0)}(\overline{D}_1)\cap C^{(0)}(\overline{\Delta})\cap C^{(1)}[\overline{D}_1\setminus(O\cup A)]\cap C^{(1)}(\overline{\Delta}\setminus A)\cap C^{(2)}(D_1\cup\Delta)$;

3) $u|_{\overline{\sigma}}=\varphi$, $u|_{\overline{OC}}=\psi$; $\varphi\in C^{(0)}$; $\psi\in C^{(1)}$;

4) $u(x;-0)=\alpha(x)u(x;+0)$, $0\leqslant x\leqslant l$; $u_y(x;-0)=\beta(x)u_y(x;+0)+\gamma(x)u(x;+0)$, $0<x<l$; $\alpha\in C^{(0)}[0,l]$, β, $\gamma\in C^{(0)}(0,l)$; $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma\leqslant0$; $\alpha(x)$ не убывает на $[0,l]$.

Лемма 2 (модифицированный принцип А. В. Бицадзе [3]). *Пусть $u(x,y)$ — решение задачи $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ $(\mathscr{L}_{\alpha\beta\gamma})$, $u(0;-0)=0$, $u_y(0;-0)=0$. Если на характеристике OA коэффициенты уравнения (Λ) $((\mathscr{L}))$ удовлетворяют одному из неравенств (C), (C'), (C''), (D), то* $\max\limits_{\overline{\Omega}_1}|u|=\max\limits_{\overline{\sigma}}|u|$ $(\max\limits_{\overline{D}_1}|u|=\max\limits_{\overline{\sigma}}|u|)$.

Доказательство следует из леммы 1, свойств $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и известных свойств параболических и эллиптических уравнений.

Замечание 1. Легко показать, что лемма 2 остается в силе и при M, M_x, N, $F\in C^{(0)}(\Delta\cup OA\cup OC')$, $C'\in OC$.

В дальнейшем при $\Delta=\Delta_2''$ задача $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ $(\mathscr{L}_{\alpha\beta\gamma})$ изучается в классе $[H]$: функция $u\in[H]$, если $u_y(0;-0)=0$.

Теорема 1. *Если на характеристике OA коэффициенты уравнения (Λ) $((\mathscr{L}))$ удовлетворяют одному из неравенств (C), (C'), (C''), (D) или $\max\limits_{\overline{\Omega}_1}|F|$ $(\max\limits_{\overline{D}_1}|F|)$ достаточно велик и $\alpha(x)\leqslant\beta(x)$, то решение задачи $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ $(\mathscr{L}_{\alpha\beta\gamma})$ единственно.*

Доказательство следует из леммы 2.

Теорема 2. *Если $\alpha'(x)/\alpha(x)\geqslant k$ и $\gamma(x)\leqslant m$ при $0<x<l$, то решение задачи $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ $(\mathscr{L}_{\alpha\beta\gamma})$ единственно. Здесь, как и ниже, k и $m\leqslant0$ — некоторые числа, определяемые из требования выполнимости неравенства (C).*

Доказательство следует из возможности требуемого выбора чисел k и m.

Замечание 2. Теорема 1 также верна, если

$$m\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{\alpha(x)}+\gamma(x)\leqslant 0$$

и $\max\limits_{\overline{\Omega}_1}|F|$ $(\max\limits_{\overline{D}_1}|F|)$ достаточно велик.

Решение $u(x, y)$ задачи $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ будем считать принадлежащим классу $[P]$, если $u_{xx}\in C^{(0)}(\Omega_1\cup OA)$. Пусть $u(x;\ +0)\equiv\tau(x)=\tau$. Можно показать, что в классе $[P]$ задача $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ редуцируется к двухточечной краевой задаче для интегродифференциального уравнения вида

$$\tau''+p(x)\tau'+q(x)\tau=\int\limits_0 R(x,t)\tau(t)\,dt+f(x),\quad \tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau(l)=\varphi_2(0). \tag{1}$$

В частности, если $M=N=F=0$ при $y<0$ и $\Delta=\Delta_1$, то в уравнении (1) отсутствует интегральный член, причем при $M(x;\ +0)=0$, $F(x;\ +0)=0$ и $N(x;\ +0)=-1$ оно переходит в уравнение

$$\tau''+\frac{\alpha(x)\gamma(x)}{\beta(x)}\tau=\frac{1}{\beta(x)}\psi'(0).$$

Отсюда следует, что в простейшем случае ($M=F=0$, $N=-1$ в Ω_1, $\varphi_1=\varphi_2=0$) решение «классической» задачи Трикоми Λ_{110} определяется формулой

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\psi'(0)}{2}\displaystyle\int\limits_0^l G(x,y,t)\,(t^2-lt)\,dt, & y\geqslant 0,\\[2ex] \psi(y)+\dfrac{\psi'(0)}{2}(x^2-lx), & y\leqslant 0;\end{cases}$$

здесь $G(x, y, t)$ — функция Грина.

3. Рассмотрим уравнения

$$T[u]\equiv u_{xx}+\operatorname{sgn} y\,u_{yy}+M(x,\ y)u_x+N(x,\ y)u_y+F(x,\ y)u=0, \tag{T}$$

$$\mathfrak{T}[u]\equiv\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_{xx}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}(u_{xx}-u_{yy})+M(x,y)u_x+N(x,y)u_y+F(x,y)u=0 \tag{$\mathfrak{T}$}$$

соответственно в областях $D=D_1\cup OA\cup D_2$ и $D_*=\Omega_1\cup OA\cup D_2$, где D_1 и Ω_1 — описанные выше области, а область D_2 ограничена отрезком OA и характеристиками OC и AC; M, N, $F\in C^{(0)}(D_2)$; M, $N\in C^{(1)}(\overline{D}_2\setminus\overline{OA})$; $F\leqslant 0$ при $y\geqslant 0$; в уравнении (T) M, N, $F\in C^{(0)}(\overline{D}_1)$; в уравнении $(\mathfrak{T})$ M, N, $F\in C^{(0)}(\overline{\Omega}_1)$, $N<0$ в $\overline{\Omega}_1$.

Задача $T_{\alpha\beta\gamma}$. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $T[u]\equiv 0$ в $D_1\cup D_2$;

2) $u\in C^{(0)}(\overline{D}_1)\cap C^{(0)}(\overline{D}_2)\cap C^{(1)}[\overline{D}_1\setminus(O\cup A)]\cap C^{(1)}(\overline{D}_2\setminus(O\cup A)]\cap$ $\cap C^{(2)}(D_1\cup D_2)$;

3) $u|_{\sigma}=\varphi$, $u|_{\overline{OC}}=\psi$; $\varphi\in C^{(0)}$, $\psi\in C^{(1)}$;

4) $u(x;\ -0)=\alpha(x)u(x;\ +0)$, $0<x<l$; $u_y(x;\ -0)=\beta(x)u_y(x;\ +0)+$ $+\gamma(x)u(x;\ -0)$, $0<x<l$, $\alpha\in C^{(0)}[0,\ l]$; β, $\gamma\in C^{(0)}(0,\ l)$; $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma\leqslant 0$; $\alpha(x)$ не убывает на $[0, l]$.

Задача $\mathfrak{T}_{\alpha\beta\gamma}$. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $\mathfrak{T}[u]\equiv 0$ в $\Omega_1\cup BQ\cup D_2$;

2) $u\in C^{(0)}(\overline{\Omega}_1)\cap C^{(0)}(\overline{D}_2)\cap C^{(1)}[\overline{\Omega}_1\ \setminus(O\cup A)]\cap C^{(1)}[D_2\ \setminus(O\cup A)]\cap$ $\cap C^{(2)}(\Omega_1\cup D_2)$;

3) $u|_{\overline{OB}}=\varphi_1(y)$, $u|_{\overline{AQ}}=\varphi_2(y)$, $u|_{\overline{OC}}=\psi$; $\varphi_1, \varphi_2\in C^{(0)}$, $\psi\in C^{(1)}$;

4) $u(x;\ -0)=\alpha(x)u(x;\ +0)$, $0\leqslant x\leqslant l$; $u_y(x;\ -0)=\beta(x)u_y(x;\ +0)+\gamma(x)u(x;\ +0)$, $0<x<l$; $\alpha\in C^{(0)}[0, l]$; $\beta, \gamma\in C^{(0)}(0, l)$; $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma\leqslant 0$, $\alpha(x)$ не убывает на $[0, l]$.

Лемма 3 (модифицированный принцип А. В. Бицадзе [3]). *Пусть $u(x, y)$ — решение задачи* $T_{\alpha\beta\gamma}$ ($\mathfrak{T}_{\alpha\beta\gamma}$), $u|_{\overline{OC}}=0$. *Если в области D_2 коэффициенты уравнения (T)* ($\mathfrak{T}$) *удовлетворяют условиям* (C) *или* (D) *из* [3], *то* $\max\limits_{D_1}|u|=\max\limits_{\sigma}|u|$ $(\max\limits_{\bar{\Omega}}|u|=\max\limits_{\bar{\sigma}}|u|)$.

Доказательство следует из теоремы 1 работы [1] и известных свойств эллиптических и параболических уравнений.

Теорема 3. *Если в области D_2 коэффициенты уравнения (T)* (($\mathfrak{T}$)) *удовлетворяют условиям* (C) *или* (D) *работы* [1] *или* $\alpha'(x)\geqslant 0$,

$$(k+m)\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{\alpha(x)}+\gamma(x)\leqslant 0$$

при $0<x<l$ *и* $\max\limits_{D_1}|F|$ $(\max\limits_{\Omega_1}|F|)$ *достаточно велик, то решение задачи* $T_{\alpha\beta\gamma}$ ($\mathfrak{T}_{\alpha\beta\gamma}$) *единственно.*

Здесь, как и всюду ниже, k и m — некоторые числа, определяемые из требования выполнимости условий (C) *работы* [1].

Теорема 4. *Если* $\alpha'(x)/\alpha(x)\geqslant k-m$ *и* $\gamma(x)\leqslant k+m$ *при* $0<x<l$, *то решение задачи* $T_{\alpha\beta\gamma}$ ($\mathfrak{T}_{\alpha\beta\gamma}$) *единственно.*

Замечание 3. Лемма 3 и теоремы 3 и 4 останутся в силе, если в области D_2 $u(x, y)$ заменим обобщенным решением класса S [4].

Функцию $u(x, y)$ будем считать обобщенным решением класса $[\tilde{S}]$ задачи $T_{\alpha\beta\gamma}$, если она обладает всеми свойствами решения этой задачи, кроме, может быть $T[u]=0$ в D_2, и в области D_2 является обобщенным решением класса S [4]. Из теорем 4 и 3 с учетом результатов работы [4] соответственно следуют

Теорема 5. *При* $\alpha(x)=\beta(x)=\exp\{(k-m)x\}$, $\gamma(x)=k+m$ *и ограничениях, наложенных в* [4] *на* $\bar{\sigma}$, φ, ψ *и на* $M(x, y)$, $N(x, y)$, $F(x, y)$ *соответственно в* D_1 *и* D_2, *в классе* $[\tilde{S}]$ *задача* $T_{\alpha\beta\gamma}$ *однозначно разрешима.*

Теорема 6. *В условиях теоремы 3 и ограничениях, наложенных в* [4] *на* $\bar{\sigma}$, φ, ψ *и на* $M(x, y)$, $N(x, y)$, $F(x, y)$ *соответственно в* D_1 *и* D_2, *в классе* $[\tilde{S}]$ *задача* T_{110} *однозначно разрешима.*

Автор выражает благодарность С. П. Пулькину и участникам его семинара за обсуждение изложенных выше результатов.

Куйбышевский политехнический институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
20 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Е. Лернер*, ДАН, т. 177, № 6, 1269 (1967). [2] *М. Е. Лернер*, Матер. Всесоюзн. конфер. по краевым задачам, Казань. 1970. [3] *А. В. Бицадзе*, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, 1959. [4] *С. П. Пулькин*, ДАН, т. 118, № 1, 38 (1958).