Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 517.948.32+35 *МАТЕМАТИКА*

Б. В. ПАЛЬЦЕВ

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ С ОДНОРОДНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ ЯДРА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 14 II 1974)

В настоящей заметке мы приводим полученные результаты относительно асимптотического поведения собственных значений λ_l и собственных функций $u_l(t)$ при $l\to\infty$ интегрального оператора свертки

$$\int_0^T k(t-\tau)u_l(\tau)\,d\tau=\lambda_l u_l(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1}$$

образ Фурье ядра которого — функция $\tilde{K}(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs}k(s)\,ds$ (мы считаем, что $k(s)$ определено при $-\infty<s<+\infty$) — является произвольной положительно однородной функцией порядка $-\gamma$, $0<\gamma<1$; $\tilde{K}(x)=\{A|x|^{-\gamma}$ при $x>0$, $B|x|^{-\gamma}$ при $x<0\}$, где A и B — произвольные комплексные постоянные, не равные нулю.

Домножением на некоторый множитель $\tilde{K}(x)$ может быть приведена к виду

$$\tilde{K}(x)=\{ke^{i\delta}|x|^{-\gamma} \text{ при } x>0,\quad e^{-i\delta}|x|^{-\gamma} \text{ при } x<0\},\quad k>0,\quad -\pi/2<\delta\leqslant\pi/2, \tag{2}$$

а соответствующее функции (2) ядро $k(s)$

$$k(s)=\frac{\Gamma(1-\gamma)k^{1/2}}{\pi}\begin{cases}|s|^{-(1-\gamma)}\sin\pi(\gamma/2-\nu), & s>0,\\ |s|^{-(1-\gamma)}\sin\pi(\gamma/2+\nu), & s<0,\end{cases} \tag{3}$$

$$\nu=\frac{\delta}{\pi}+\frac{1}{2\pi i}\ln k.$$

Оператор K при $0<|\delta|<\pi/2$ не является самосопряженным, при $\delta=0$ он самосопряжен и положителен, при $\delta=\pi/2$ самосопряжен оператор iK. Кроме того оператор K становится вольтерровым при $\nu=\pm\gamma/2$, т. е. при $k=1$, $|\delta|=(\pi/2)\gamma$. Очевидно также, что значения формы $(Ku,\ u)_{L_2(0,\,T)}$, определяемой K, лежат в секторе $|\arg(Ku,\ u)_{L_2(0,\,T)}|<|\delta|\quad \forall u\in L_2(0,\ T)$.

Асимптотика спектра интегральных операторов свертки и несколько более общих операторов на конечном интервале, а также в ограниченной многомерной области изучалась в основном для самосопряженного случая, см. ([1-4]). Однако методика этих работ, существенно использующая на определенном этапе в той или иной форме вариационные принципы для спектра самосопряженных операторов, позволяет получить лишь первый член асимптотики собственных значений. Известно также небольшое количество работ, относящихся к несамосопряженному случаю, в которых проводились более детальные рассмотрения и были получены последующие члены асимптотического разложения собственных значений, но для узкого класса ядер, характеризуемого в принципе тем, что задача (1) может быть сведена к спектральной задаче для дифференциальных операторов. Поэтому, на наш взгляд, замечательной явилась работа ([9]), в которой ядра $k(s)=|s|^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$ (в (2) это соответствует $k=1$, $\delta=0$), т. е. в случае, уже по существу не сводящемся к случаю дифференциальных операторов, были найдены, правда не совсем строго, первые два члена асимптотики собственных значений. Успех С. Укаи связан с тем, что он фактически свел задачу (1) в образах Фурье к граничной задаче Гильберта на мнимой оси для двух функций, которую он, однако, по существу не рассматривал.

Мы также сводим задачу (1) к однородной граничной задаче Гильберта для двух пар функций на некоторой прямой, проходящей через начало координат и отличной от действительной прямой, причем более простым путем, следуя рассуждениям, аналогичным рассуждениям в ([10], [8]), замечая при этом, что $\tilde{K}(x)$ допускает аналитическое продолжение с действительной оси в комплексную плоскость с разрезом вдоль будущей линии сопряжения. Матрица в полученной задаче Гильберта, к тому же разрывна в начале координат. Как известно, см. ([11]), нахождение канонической матрицы решений граничной задачи Гильберта представляет собой весьма сложную задачу. Удается построить каноническую матрицу в нашем случае при больших $|\rho|$, $\rho=\lambda^{-1/\gamma}$, сводя задачу к системе интегральных уравнений на полуоси и разрешая последнюю с помощью преобразования Меллина. При этом построении оказывается необходимым еще провести оценки образов Меллина решений системы в некоторых банаховых пространствах аналитических функций с фиксированными полюсами. В конечном итоге получаем и асимптотические разложения при $|\rho|\to\infty$ общего решения задачи сопряжения.

Характеристическое уравнение для нахождения и исследования асимптотики собственных значений возникает из условия аналитичности образа Фурье функции $u_l(t)$ (продолженной нулем вне интервала $(0, T)$ в нулях символа $\tilde{K}(z)-\lambda$). Можно получить также и асимптотику собственных функций. Имеет место

Теорема. *Оператор свертки K с ядром* (3), *имеющим образ Фурье* (2), *имеет бесконечное число собственных значений при всех k и δ, за исключением значений $k=1$, $|\delta|=(\pi/2)\gamma$, при которых K вольтерров.*

Собственные значения λ_l и собственные функции $u_l(t)$ при больших целых номерах l, $l\to\infty$, допускают асимптотические разложения.

1°) При $\delta=0$

$$\lambda_l=\left(\frac{2\pi l}{(1+k^{1/\gamma})\,T}\right)^{-\gamma}\left[1+\frac{\theta_1}{2\pi l}+\frac{\theta_2}{(2\pi l)^2}+\frac{\theta_{2+2\nu}e^{ik^{1/\gamma}\cdot 2\pi l/(1+k^{1/\gamma})}}{(2\pi l)^{2+2\nu}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\bar{\theta}_{2-2\nu}e^{i\cdot 2\pi l/(1+k^{1/\gamma})}}{(2\pi l)^{2-2\nu}}+O\left(e^{-2-\gamma}\right)\right], \tag{4}$$

$$u_l(t)=c\left\{e^{-i\mathring{\rho}_l t}+\alpha(k)\cdot e^{ik^{1/\gamma}\mathring{\rho}_l t}+\int_0^\infty \Gamma_0(\xi)\,e^{-\mathring{\rho}_l\xi t}d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty \Gamma_T(\xi)\,e^{-\mathring{\rho}_l\xi(T-t)}d\xi+O(l^{-1})\right\}. \tag{5}$$

2°) При $\delta\neq0$ собственные значения можно разбить на две серии λ_l^+ и λ_l^-, для каждой из которых справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda_l^{\pm}=k^{(1\pm1)/2}e^{\pm i\delta}\left(\frac{2\pi l}{T}\right)^{-\gamma}\left[1\mp i\mu\gamma\frac{\ln 2\pi l}{2\pi l}+\frac{\theta_1^{\pm}}{2\pi l}+O(l^{-1-\gamma})\right]. \tag{6}$$

Соответствующие собственные функции $u_l^{\pm}(t)$ имеют асимптотику

$$u_l^{\pm}(t)=c\left\{e^{\pm i(2\pi l-\theta_1^{\pm}/\gamma)\,t/T}(2\pi l)^{-\mu t/T}\left(1+O(l^{-\gamma})\right)+\right.$$

$$+\int\limits_0^\infty \Gamma_0^\pm(\xi;\,\beta_\pm)\,e^{-\xi(\rho_l^\pm)' t}(1+O(l^{-\gamma}))\,d\xi+O\left(l^{-\alpha^*}\left(1+\left(\frac{lt}{T}\right)^{1-|\delta|/\pi+\gamma/2-\alpha^*}\right)^{-1}\right)+$$

$$+(\mathring{\rho}_l^\pm T)^{-\mu}\Bigg[\int\limits_0^\infty \Gamma_T^\pm(\xi;\,\beta_\pm)\,e^{-\xi(\mathring{\rho}_l^\pm)'(T-t)}(1+O(l^{-\gamma}))\,d\xi+$$

$$+O\left(l^{-(|\delta|/\pi+\gamma/2-\varepsilon)}\left(1+\left(\frac{l(T-t)}{T}\right)^{\varepsilon}\right)^{-1}\right)\Bigg]\Bigg\} \tag{7}$$

при $\delta>0$, а при $\delta<0$ выражение для $u_l^\pm(t)$ получается формальной заменой в (7) μ на $-\mu$, t — на $(T-t)$, $(T-t)$ — на t, $\Gamma_0^\pm(\xi;\ \beta_\pm)$ — на $\Gamma_T^\pm(\xi;\ \beta_\pm)$, $\Gamma_T^\pm(\xi;\ \beta_\pm)$ — на $\Gamma_0^\pm(\xi;\ \beta_\pm)$ и множителя $e^{\pm i(2\pi l-\theta_1/\gamma)t/T}$ — множителем $e^{\mp i(2\pi l-\theta_1/\gamma)(T-t)/T}$.

В (4)—(7) $\alpha(k)$, θ_1, θ_2, $\theta_{2+2\nu}$, $\theta_{2-2\nu}$, $\theta_{-1}^\pm$ — некоторые постоянные, определяемые k и δ;

$$\mu=-2\nu+\operatorname{sign}\delta,\quad \mathring{\rho}_l=\frac{2\pi l-\theta_1/\gamma}{(1+k^{1/\gamma})T}, \tag{8}$$

$$(\mathring{\rho}_l^\pm)'=e^{-i\beta_\pm}\mathring{\rho}_l^\pm,\quad \mathring{\rho}_l^\pm=\frac{k^{-(1\pm1)/2}e^{\mp i\delta/\gamma}}{T}\left[2\pi l\pm i\mu\ln 2\pi l-\frac{\theta_1^\pm}{\gamma}\right].$$

$\Gamma_0(\xi)$, $\Gamma_T(\xi)$ в (5), $\Gamma_0^\pm(\xi;\ \beta_\pm)$, $\Gamma_T^\pm(\xi;\ \beta_\pm)$ в (7) (последние зависят от $\beta_\pm$) — некоторые гладкие функции ξ, $0<\xi<\infty$, определяемые k и δ, имеющие следующее поведение в окрестности $\xi=0$:

$$\Gamma_0(\xi)\sim\mathrm{const}\cdot\xi^{\gamma/2},\qquad \Gamma_T(\xi)\sim\mathrm{const}\cdot e^{-i\cdot 2\pi l/(1+k^{1/\gamma})}\cdot\xi^{\gamma/2},$$
$$\Gamma_0^\pm(\xi;\ \beta_\pm)\sim\mathrm{const}\cdot\xi^{\gamma/2-1/2+\mu/2},\qquad \Gamma_T^\pm(\xi;\ \beta_\pm)\sim\mathrm{const}\cdot\xi^{\gamma/2-1/2-\mu/2}, \tag{9}$$

а при $\xi\to\infty$

$$|\Gamma_0(\xi)|,\ |\Gamma_T(\xi)|,\ |\Gamma_0^\pm(\xi;\ \beta_\pm)|,\ |\Gamma_T^\pm(\xi;\ \beta_\pm)|\leqslant\mathrm{const}\,\xi^{-(1+\gamma)},$$

α^* в (7) может быть взято: $\alpha^*=1$ при $|\delta|<(\pi/2)\gamma$, $\alpha^*=1-|\delta|/\pi+\gamma/2-\varepsilon$ при $|\delta|\geqslant(\pi/2)\gamma$, где здесь и в (7) $\varepsilon>0$ можно взять сколь угодно близким к нулю; наконец, $\beta_\pm$ можно взять произвольным из интервалов:

$$-|\delta|/\gamma\mp(\pi/2)\operatorname{sign}\delta<\beta_\pm<|\delta|/\gamma\mp(\pi/2)\operatorname{sign}\delta\quad\text{при}\quad|\delta|<(\pi/2)\gamma,$$
$$-\pi/2\mp\delta/\gamma<\beta_\pm<\pi/2\mp\delta/\gamma\quad\text{при}\quad|\delta|\geqslant(\pi/2)\gamma.$$

В заключение сделаем следующие замечания.

1. Нетрудно проверить, что $\operatorname{Re}(\mathring{\rho}_l^\pm)\geqslant\omega(\beta_\pm)\cdot l$, где $\omega(\beta_\pm)>0$ не зависят от l. Из (9) получаем, что «погранслойные» добавки к главным частям собственных функций (т. е. к первые двум слагаемым в (7) и к первому слагаемому в (9)) внутри $(0, T)$ стремятся к нулю с ростом l только лишь степенным образом: например,

$$\int\limits_0^\infty \Gamma_T^\pm(\xi;\ \beta_\pm)\,e^{-\xi(\mathring{\rho}_l^\pm)'(T-t)}(1+O(l^{-\gamma}))\,d\xi=O\left(\left(1+\left(\frac{l(T-t)}{T}\right)^{1+\gamma/2-|\delta|/\pi}\right)^{-1}\right)$$

при $\delta<0$, а не экспоненциально, как это обычно имеет место для собственных функций дифференциальных операторов. Это объясняется существенной «псевдодифференциальностью» оператора K.

2. Ясно, что при $\delta=0$ и при $\delta=\pi/2$ собственные функции оператора K образуют ортонормированный базис, причем при $\delta=0$ вследствие строгой положительности K в $L_2(0, T)$, при $\delta=\pi/2$ заведомо в замыкании области значений K по метрике $L_2(0, T)$. При $0<|\delta|<\pi/2$ корневые векторы K не могут образовывать базис в $L_2(0, T)$, поскольку угол между $u_l^\pm(t)$ и $u_{l+1}^{+}(t)$ стремится к нулю при $l\to\infty$. Действительно, используя (9), нетрудно получить $(u_l^\pm, u_{l+1}^{+})/\|u_l^\pm\|\,\|u_{l+1}^{+}\|=1+O((\ln l)^{-1})$. При $|\delta|<(\pi/2)\gamma$, однако из известной теоремы 6.1, гл. 5 работы ([12]) следует, что система корневых

векторов оператора K полна в $L_2(0, T)$, поскольку из результатов работы ([13]) вытекает оценка для сингулярных чисел: $s_l(K) \leqslant Cl^{-\gamma}$, $l=1, 2, \ldots$ Представляет интерес изучить, каким методом возможно суммировать разложение произвольной $f \in L_2(0, T)$ в ряд по корневым векторам оператора K при $0 < |\delta| < \pi/2$.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *M. Rosenblatt*, J. Math. Mech., v. 12, № 4 (1963). [2] *H. Widom*, Trans. Am. Math. Soc., v. 109, № 2 (1963). [3] *H. Widom*, Arch. Rat. Mech. Anal., v. 17, № 3 (1964). [4] *М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 5 (1970). [5] *Г. М. Мордасова*, ДАН СССР, т. 142, № 5 (1962). [6] *М. Х. Захар-Иткин*, Вестн. Московск. унив., матем., механ., № 4 (1966). [7] *Б. В. Пальцев*, ДАН, т. 194, № 4 (1970). [8] *Б. В. Пальцев*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 36, № 3 (1972). [9] *S. Ukai*, J. Math. Phys., v. 12, № 1 (1971). [10] *М. Н. Ганин*, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 2 (1963). [11] *Н. П. Векуа*, Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, «Наука», 1968. [12] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. [13] *Г. П. Костометов, М. З. Соломяк*, Вестн. Ленингр. унив., № 1 (1971).