Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

С. В. ПОЛИН

МОРИТА-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ТЕОРЕМЫ ДЖЕКОБСОНА — РИСА ДЛЯ КОЛЕЦ И МОНОИДОВ В ЗАМКНУТЫХ КАТЕГОРИЯХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 24 I 1974)

Пусть Λ — некоторый класс элементов. Тогда семейство категорий $\mathfrak{R}=\{\mathfrak{R}_{\alpha\beta}|\alpha,\ \beta\in\Lambda\}$ называется моноидальным, если для всех α, β, γ, $\delta\in\Lambda$ существуют:

а) функторы $-\otimes-$: $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}\times\mathfrak{R}_{\beta\gamma}\to\mathfrak{R}_{\alpha\gamma}$;

б) нейтральные объекты Z_α в $\mathfrak{R}_{\alpha\alpha}$;

в) естественные изоморфизмы a_{PQR}: $(P\otimes Q)\otimes R\to P\otimes(Q\otimes R)$ в $\mathfrak{R}_{\alpha\delta}$, определенные для всех $P\in\mathrm{Ob}\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$, $Q\in\mathrm{Ob}\mathfrak{R}_{\beta\gamma}$, $R\in\mathrm{Ob}\mathfrak{R}_{\gamma\delta}$;

г) естественные изоморфизмы r_P: $P\otimes Z_\beta\to P$, l_P: $Z_\alpha\otimes P\to P$, определенные для всех $P\in\mathrm{Ob}\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$; причем изоморфизмы a, r, l удовлетворяют аксиомам MC1, MC2 когерентности (см. (1)).

В дальнейших рассмотрениях фиксируем некоторое моноидальное семейство $\mathfrak{R}=\{\mathfrak{R}_{\alpha\beta}|\alpha,\ \beta\in\Lambda\}$ категорий.

Функтор $[-,\ -]$: $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}^{Op}\times\mathfrak{R}_{\alpha\gamma}\to\mathfrak{R}_{\beta\gamma}$ назовем Hom-функтором, если существуют естественные изоморфизмы ω_{PQR}: $H_{\mathfrak{R}_{\alpha\gamma}}(P\otimes Q,\ R)\to H_{\mathfrak{R}_{\beta\gamma}}(Q,\ [P,\ R])$, определенные для всех $P\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$, $Q\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}_{\beta\gamma}$, $R\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}_{\alpha\gamma}$. Если Hom-функторы определены для всех троек α, β, γ элементов из Λ, то семейство $\mathfrak{R}$ будем называть замкнутым. Если замкнутое семейство состоит из одной категории $\mathfrak{T}$, то категорию $\mathfrak{T}$ будем называть замкнутой.

Для замкнутого семейства категорий справедливо

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{R}=\{\mathfrak{R}_{\alpha\beta}|\alpha,\ \beta\in\Lambda\}$ *— замкнутое семейство категорий,* α, β, $\gamma\in\Lambda$, $P\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$. *Тогда*:

а) *категория* $\mathfrak{R}_{\alpha\alpha}$ *является моноидальной*;

б) *категория* $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ *является* $\mathfrak{R}_{\beta\beta}$*-категорией, а* Hom*-функтор* $[-,\ -]$: $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}^{Op}\times\mathfrak{R}_{\alpha\beta}\to\mathfrak{R}_{\beta\beta}$ *— поднятым* Hom*-функтором*;

в) *функторы* $P\otimes-$: $\mathfrak{R}_{\beta\gamma}\to\mathfrak{R}_{\alpha\gamma}$, $[P,\ -]$: $\mathfrak{R}_{\alpha\gamma}\to\mathfrak{R}_{\beta\gamma}$ $\mathfrak{R}_{\gamma\gamma}$*-сопряжены.*

Естественные преобразования, сопутствующие сопряжению $(P\otimes-)\dashv[P,\ -]$, будем обозначать через χ_{PR}: $P\otimes[P,\ R]\to R$ и ρ_{PQ}: $Q\to[P,\ P\otimes Q]$.

Инволюцией в семействе $\mathfrak{R}$ назовем тройку $(\iota,\ J,\ k)$, где ι — такое отображение ι: $\Lambda\to\Lambda$, что $\iota^2=1_\Lambda$, J — такое семейство функторов $J_{\alpha\beta}$: $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}\to\mathfrak{R}_{\beta\iota\alpha\iota}$, что $J_{\alpha\beta}J_{\beta\iota\alpha\iota}=1_{\mathfrak{R}_{\alpha\beta}}$, k — семейство естественных изоморфизмов k_{PQ}: $PJ_{\alpha\beta}\otimes QJ_{\gamma\alpha}\to(Q\otimes P)J_{\gamma\beta}$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{T}$ — замкнутая симметричная категория, X — некоторый класс и категория $\mathfrak{T}$ X-полна, т. е. в $\mathfrak{T}$ существуют ядра и коядра любой пары морфизмов с общим началом и концом, а также прямые и свободные произведения любого семейства объектов из $\mathfrak{T}$, индексированного любым подмножествам класса X, $\mathscr{B}(X)$ — класс подмножеств класса X. Тогда, следуя построениям § 3 работы (1), нетрудно установить, что семейство $\mathfrak{T}^{(X)}=\{\mathfrak{T}^{U\times V}|U,\ V\in\mathscr{B}(X)\}$ категорий является замкнутым семейством с инволюцией для подходящих функторов $-\otimes-$, $[-,\ -]$.

Пусть $\mathfrak{P}$ есть моноидальная категория. Тогда можно определить понятие кольца в $\mathfrak{P}$ как пары $(C,\ m)$, где m: $C\otimes C\to C$ есть морфизм категории $\mathfrak{P}$, подчиняющийся аксиоме Mon 1 (1), выражающей ассоциативность умножения m. Роль колец с единицей играют так называемые моноиды в $\mathfrak{P}$ (см [1]). Если $\mathscr{A}$ есть $\mathfrak{P}$-категория и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, то моноидом будет тройка $\mathrm{End}(A) = (\mathscr{A}(A, A), j_A, c_{AAA})$.

Для рассматриваемого семейства $\mathfrak{R}$ через $\mathrm{Mon}(\mathfrak{R})$ обозначим класс всех моноидов в категориях $\mathfrak{R}_{\alpha\alpha}$, $\alpha \in \Lambda$.

Теоретико-кольцевые понятия унитарного модуля, бимодуля могут быть сформулированы так, что в формулировках не будет использоваться понятие элемента кольца или модуля (см., например, определение модулей над градуированным кольцом в [2]). Такой подход позволяет ввести для всех моноидов $\mathscr{C}$, $\mathscr{D} \in \mathrm{Mon}(\mathfrak{R})$ понятия левого (правого) $\mathscr{C}$-полигона, $\mathscr{C}-\mathscr{D}$-биполигона, являющиеся обобщениями классических понятий. Можно ввести понятие гомоморфизма $\mathscr{C}-\mathscr{D}$-биполигонов. Тем самым мы получим категорию $\mathfrak{R}_{\mathscr{C}\mathscr{D}}$ $\mathscr{C}-\mathscr{D}$-биполигонов.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_{\alpha\beta} | \alpha, \beta \in \Lambda\}$ — *замкнутое семейство категорий с инволюцией, каждая категория* $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ *есть категория с ядрами и коядрами.*

Тогда для всех моноидов $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E} \in \mathrm{Mon}(\mathfrak{R})$ *можно так определить функторы* $-\otimes-: \mathfrak{R}_{\mathscr{C}\mathscr{D}} \times \mathfrak{R}_{\mathscr{D}\mathscr{E}} \to \mathfrak{R}_{\mathscr{C}\mathscr{E}}$, $[-, -]: \mathfrak{R}^{Op}_{\mathscr{C}\mathscr{D}} \times \mathfrak{R}_{\mathscr{C}\mathscr{E}} \to \mathfrak{R}_{\mathscr{D}\mathscr{E}}$, *что семейство категорий* $\{\mathfrak{R}_{\mathscr{C}\mathscr{D}} | \mathscr{C}\mathscr{D} \in \mathrm{Mon}\ (\mathfrak{R})\}$ *будет замкнутым.*
$\in \mathrm{Mon}(\mathfrak{T}^{(X)})\}$, где $\mathfrak{T}^{(X)}$ — семейство категорий, построенное в примере 1.

В частности, мы получаем замкнутое семейство $\{\mathfrak{T}_{\mathscr{C}\mathscr{D}} | \mathscr{C}, \mathscr{D} \in$

Как показано в § 3 работы [1], каждый моноид в $\mathfrak{T}^{U\times U}$ можно отождествить с $\mathfrak{T}$-категорией, множеством объектов которой является множество U. Для моноида $\mathscr{C}$ в $\mathfrak{T}^{U\times U}$ через ${}_{\mathscr{C}}\mathfrak{T}$ обозначим категорию $\mathscr{C}-\mathscr{Z}$-биполигонов, где $\mathscr{Z} = (Z, 1_Z, r_Z)$, а Z — нейтральный объект в $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{\{x\}\times\{x\}}$, $x \in X$.

Можно показать, что категория ${}_{\mathscr{C}}\mathfrak{T}$ эквивалентна категории контрвариантных $\mathfrak{T}$-функторов из $\mathscr{C}$ в $\mathfrak{T}$. Поэтому теорема 1 может быть применена для изучения $\mathfrak{T}$-категорий и категорий $\mathfrak{T}$-функторов. На этом пути получается

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{T}$ — *X-полная замкнутая симметричная категория,* $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ — *моноиды в* $\mathfrak{T}^{U\times U}$ *и* $\mathfrak{T}^{V\times V}$ *соответственно* $(U, V \in \mathscr{B}(X))$, $\mathfrak{F}: {}_{\mathscr{C}}\mathfrak{T} \to {}_{\mathscr{D}}\mathfrak{T}$; $\mathfrak{G}: {}_{\mathscr{D}}\mathfrak{T} \to {}_{\mathscr{C}}\mathfrak{T}$ — $\mathfrak{T}$-*функторы.*

Тогда для того, чтобы существовало $\mathfrak{T}$-*сопряжение* $\alpha: \mathfrak{T}(\mathfrak{F} \dashv \mathfrak{G})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал* $\mathscr{D}-\mathscr{C}$-*биполигон* $\mathscr{M}$ *и* $\mathfrak{T}$-*естественные изоморфизмы* $\varphi: \mathfrak{F} \to \mathscr{M}^{\otimes}-$, $\psi: \mathfrak{G} \to [\mathscr{M}, -]$.

Каждый левый $\mathscr{C}$-полигон $\mathscr{M}$ можно рассматривать для подходящего $V \in \mathscr{B}(X)$ как $\mathscr{C}-\mathscr{Z}_V$-биполигон, где $\mathscr{Z}_V = (Z_V, 1_{Z_V}, r_{Z_V})$, а Z_V — нейтральный объект в моноидальной категории $\mathfrak{T}^{V\times V}$. Поэтому функторы $-\otimes-$, $[-, -]$ определены не только для биполигонов, но и для левых полигонов.

Рассмотрим моноид $\mathscr{C}$ в $\mathfrak{T}^{U\times U}$ и левый $\mathscr{C}$-полигон $\mathscr{M}$. Назовем $\mathscr{M}$ образующим $\mathscr{C}$-полигоном, если для всех $\mathscr{N}$ из $\mathrm{Ob}_{\mathscr{C}}\mathfrak{T}$ морфизм $\chi_{\mathscr{M}\mathscr{N}}$: $\mathscr{M}^{\otimes}[\mathscr{M}, \mathscr{N}] \to \mathscr{N}$ левых $\mathscr{C}$-полигонов является предельным эпиморфизмом, т. е. из равенства $\chi_{\mathscr{M}\mathscr{N}} = \theta\lambda$, где λ — мономорфизм, следует, что λ — изоморфизм.

Моноид $\mathscr{C}$ можно рассматривать как $\mathscr{C}-\mathscr{C}$-биполигон, причем $\mathscr{C}$ будет нейтральным объектом в категории $\mathfrak{T}_{\mathscr{C}\mathscr{C}}$ $\mathscr{C}-\mathscr{C}$-биполигонов. Рассмотрим морфизм $\tau_{\mathscr{M}} = \sigma_{\mathscr{M}}\omega$: $[\mathscr{M}, \mathscr{C}]^{\otimes}\mathscr{M} \to [\mathscr{M}, \mathscr{M}]$, где

$$\sigma_{\mathscr{M}} = a^{-1}_{\mathscr{M}\,[\mathscr{M},\,\mathscr{C}]\,\mathscr{M}}\,(\chi_{\mathscr{M}\mathscr{C}} \otimes 1_{\mathscr{M}}) \cdot l_{\mathscr{M}}: \mathscr{M} \otimes ([\mathscr{M}, \mathscr{C}] \otimes \mathscr{M}) \to \mathscr{M}.$$

Левый $\mathscr{C}$-полигон $\mathscr{M}$ назовем ядерным, если морфизм $\tau_{\mathscr{M}}$ является изоморфизмом.

Два моноида $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ в $\mathfrak{T}^{U\times U}$, $\mathfrak{T}^{V\times V}$ соответственно назовем Морита-эквивалентными, если $\mathfrak{T}$-категории ${}_{\mathscr{C}}\mathfrak{T}$ и ${}_{\mathscr{D}}\mathfrak{T}$ $\mathfrak{T}$-эквивалентны. Описание Морита-эквивалентных моноидов дает

Теорема 3. *Пусть категория* $\mathfrak{T}$ *и моноиды* $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ *удовлетворяют предположениям теоремы* 2.

Тогда для того, чтобы моноиды $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ *были Морита-эквивалентны, не-*

обходимо и достаточно, чтобы моноид $\mathscr{D}$ был изоморфен моноиду End $(\mathscr{M})$ *для подходящего ядерного образующего левого $\mathscr{C}$-полигона $\mathscr{M}$.*

Из этой теоремы следуют результаты работ ([3-7]) о Морита-эквивалентности колец, полугрупп, малых и аддитивных малых категорий.

Далее будем предполагать, что рассматриваемая категория $\mathfrak{T}$ полна и удовлетворяет следующим аксиомам:

BC1. *$\mathfrak{T}$ является бикатегорией $(\mathfrak{T}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, где $\mathfrak{E}$ — класс предельных эпиморфизмов, а $\mathfrak{M}$ — класс мономорфизмов.*

BC2. $\mathfrak{E}\otimes\mathfrak{E}\subseteq\mathfrak{E}$.

Из полноты категории $\mathfrak{T}$ вытекает существование в $\mathfrak{T}$ левого нуля 0. Морфизм φ: $P\to Q$ категории $\mathfrak{T}$ назовем нулевым, если $\varphi=\varphi_1\varphi_2$, где $\varphi_2\in H\mathfrak{T}(0, Q)$. Будем предполагать, что $\mathfrak{T}$ удовлетворяет аксиомам:

NO1. *Если φ: $P\to Q$ — ненулевой морфизм категории $\mathfrak{T}$, то существуют такие морфизмы ψ_1, ψ_2: $Z\to P$, что $\psi_1\varphi\neq\psi_2\varphi$.*

NO2. *Z является допустимым проективным объектом бикатегории* $(\mathfrak{T}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$.

Пусть $\mathscr{R}$ — кольцо в $\mathfrak{T}$. Очевидно определение (левого, правого) идеала кольца $\mathscr{R}$, минимального одностороннего идеала кольца $\mathscr{R}$. Кольцо $\mathscr{R}=(R, m)$ назовем простым, если оно не имеет нетривиальных идеалов, и вполне простым, если оно просто, m — ненулевой морфизм и $\mathscr{R}$ содержит минимальные левый и правый идеалы.

По аналогии с п. 1.5 работы ([1]) на множестве $H\mathfrak{T}(Z, R)$ можно ввести структуру полугруппы. Построенную полугруппу будем обозначать через Sg $(\mathscr{R})$.

Моноид $\mathscr{D}$ в $\mathfrak{T}$ назовем телом, если $\mathscr{D}$ не содержит нетривиальных левых идеалов. Это эквивалентно тому, что множество ненулевых элементов полугруппы Sg $(\mathscr{D})$ является группой.

Справедлива

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{T}$ — полная замкнутая симметричная категория, удовлетворяющая аксиомам* BC1, BC2, NO1, NO2.

Моноид $\mathscr{C}$ в $\mathfrak{T}$ вполне прост тогда и только тогда, когда моноид $\mathscr{C}$ Морита-эквивалентен подходящему телу в $\mathfrak{T}$.

Для того чтобы получить описание вполне простого кольца $\mathscr{R}$ в $\mathscr{T}$, мы для каждого идемпотента f полугруппы Sg $(\mathscr{R})$ вводим в рассмотрение правый идеал $f\mathscr{R}$ кольца $\mathscr{R}$. Через i_f будем обозначать вложение i_f: $f\mathscr{R}\to\mathscr{R}$.

Следующее утверждение является аналогом теоремы плотности.

Теорема 5. *Пусть категория $\mathfrak{T}$ удовлетворяет предположениям теоремы 4, $\mathscr{R}$ — вполне простое кольцо в $\mathfrak{T}$.*

Тогда существуют такие тело $\mathscr{D}$ в $\mathfrak{T}$, левый $\mathscr{D}$-полигон $\mathscr{M}$, левые $\mathscr{D}$-полигоны $\mathscr{M}f$ и мономорфизмы λ_f: $\mathscr{M}f\to\mathscr{M}$ для каждого идемпотента f полугруппы Sg $(\mathscr{R})$, *морфизм* γ: $\mathscr{R}\to$ End $(\mathscr{M})$ *колец, что морфизм* $i_f\gamma[\lambda_f, 1_{\mathscr{M}}]$: $f\mathscr{R}\to[\mathscr{M}f, \mathscr{M}]$ *является изоморфизмом для каждого идемпотента f полугруппы* Sg $(\mathscr{R})$.

Отсюда легко выводится известная теорема Джекобсона о строении простых колец с минимальным односторонним идеалом. Можно указать описание вполне простых колец, из которого будет следовать теорема Риса об описании в поле 0-простых полугрупп.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Бунге,* Сборн. пер., Матем. т. 16, № 2, 11 (1972). [2] *С. Маклейн,* Гомология, М., 1966. [3] *С. В. Полин,* Вестн. Московск. унив., сер. матем.-мех., № 6, 25 (1973). [4] *B. Banaschewski,* Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, v. 38, 49 (1972). [5] *U. Knauer*, Semigroup Forum, v. 3, № 4, 359 (1972). [6] *D. C. Newell,* Trans Am., Math. Soc., v. 168, 423 (1972). [7] *H. Bass,* Algebraic *K*-theory, N. Y., 1968.