Доклады Академии наук СССР
1974. Том 217, № 5

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

М. М. ХАПАЕВ

ОБ ОСРЕДНЕНИИ В МНОГОЧАСТОТНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 4 II 1974)

1. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}=\mu X(x,\psi);\quad \dot{\psi}=\omega(x)+\mu\Phi(x,\psi),$$
$$x=x_1,\ldots,x_n,\quad \psi=\psi_1,\ldots,\psi_m,\quad \omega=\omega_1,\ldots,\omega_m, \tag{1}$$

точка означает дифференцирование по t, μ — малый параметр, функции X и Φ периодичны по ψ с периодом 2π. Если $m\geqslant 2$, т. е. число частот $\omega_i(x)$ превышает 1, система называется многочастотной. Будем предполагать, что правые части системы (1) равномерно относительно $\psi\in[0, 2\pi]$ удовлетворяют условию Липшица по переменным x из некоторой области D и ограничены. Будем предполагать также, что по переменным ψ, функции X и Φ можно разложить в ряды Фурье, которые при каждом $x\in D$ сходятся абсолютно и равномерно, в частности, это будет выполнено, если функции X и Φ являются $[m/2]+1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями ψ.

Для системы (1) строится осредненная система

$$\dot{\xi}=\mu X_0(\xi),\quad X_0(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi} X(x,\psi)\,d\psi, \tag{2}$$

решение которой $\xi(\mu t)$ определено для $0<t<\infty$ и лежит в области D вместе с некоторой своей окрестностью.

Согласно принципу осреднения Н. Н. Боголюбова ([1]), в одночастотном случае решения систем (1) и (2), выходящие из одной точки, остаются близкими на временах порядка $1/\mu$. Трудность исследования многочастотных систем связана с резонансными явлениями, когда в разложениях Фурье правых частей появляются медленно изменяющиеся члены $X_k(x)\exp(k\psi)$, для которых комбинационные частоты становятся малыми. Кривые или поверхности, определяемые соотношением

$$k\omega(x)=0, \tag{3}$$

называются резонансными, будем обозначать их через P_k.

Основное ограничение, обеспечивающее близость интегральных кривых систем (1) и (2) в многочастотном случае, сформулировано в п.2 и связано лишь с частью резонансных гармоник. Без таких ограничений указанная близость может не иметь места. Пример, иллюстрирующий это, приведен в работе ([2]), в которой изучаются условия применимости метода осреднения для двухчастотной системы в предположении аналитичности правых частей. Основное ограничение в этом случае связано со всеми гармониками функции $X(x,\psi)$.

2. Зададим $\varepsilon>0$ и рассмотрим в области D интегральную кривую системы (2) $\xi=\xi(\mu t)$. Она, вообще говоря, пересекает резонансные поверхности (3). Обозначим через $X_\varepsilon(x,\psi)$ сумму тех членов ряда Фурье для $X(x,\psi)$, резонансные линии которых лежат не дальше 2ε окрестности

точки $\xi=\xi(\mu t)$. Таким образом,

$$X(x, \psi)=X_0(x)+X_\varepsilon(x, \psi)+\tilde{X}(x, \psi)=X_0(x)+\hat{X}(x, \psi), \tag{4}$$

где $\tilde{X}(x, \psi)$ — осциллирующие слагаемые.

Рассмотрим теперь вектор

$$X_0(x)+X_\varepsilon(x, \psi)=\overline{X}(x, \psi) \tag{5}$$

и единичную нормаль $\bar{n}_k$, восстановленную к резонансной поверхности P_k в точке пересечения ее с кривой $\xi=\xi(\mu t)$ в сторону вектора $X_0(x)$.

Введем в рассмотрение также

$$\min(\bar{n}_k\cdot(X_0(x)+X_\varepsilon(x, \psi)))=\overline{X}_{\min}, \tag{6}$$

где min вычисляется по всем векторам k, $\psi\in[0, 2\pi]$ и x вдоль кривой $\xi=\xi(\mu t)$. Пусть $\overline{X}_{\min}$ подчиняется условию

$$a<\overline{X}_{\min}, \tag{7}$$

где $a>0$ — некоторое фиксированное число. Это ограничение не позволит интегральной кривой оставаться вблизи какой-либо поверхности резонанса. Существенно, что в $\overline{X}(x, \psi)$ входят не все члены ряда $X(x, \psi)$, а лишь те, которые близки по своим резонансным множествам к движущейся точке $\xi=\xi(\mu t)$.

3. Рассмотрим резонансную поверхность P_k с ее σ-окрестностью $P_k(\sigma)$, которую в дальнейшем выберем достаточно малой, но удовлетворяющей условию $\mu\ll\sigma<\varepsilon$. Будем предполагать, что вне полосы $P_k(\sigma)$ комбинационные частоты $(k\omega)=\lambda_k$ по порядку величины не меньше σ.

4. Принцип осреднения Н. Н. Боголюбова допускает обобщение на системы вида

$$\dot{x}=\mu[\overline{X}(x, t)+\varphi(x, t)], \tag{8}$$

где функции $\varphi(t, x)$ имеют нулевое среднее, а функции $\overline{X}(x, t)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной x. Решение этой системы остается близким на интервале времени $1/\mu$ к решению системы

$$\dot{x}=\mu\overline{X}(x, t), \tag{9}$$

выходящему из той же точки. В этом случае почти без изменений проходит доказательство, предложенное в работе ([3]).

5. Для дальнейшего нам необходимо оценить сверху отрезок времени Δt_σ, за который система проходит окрестность резонансной поверхности $P_k(\sigma)$. Для этого воспользуемся замечанием п.4 и построением п.2, согласно которому в правых частях системы (1) выделены осциллирующие члены $\tilde{X}(x, \psi)$, не содержащие резонансных экспонент и имеющие среднее 0. Используя оценку (7), получим с точностью до $O(\mu)$

$$\Delta t_\sigma<\sigma/(a\mu). \tag{10}$$

6. Для доказательства близости решений систем (1) и (2), как и в работе ([3]), составим интегральные уравнения для этих систем и, вычитая одно из другого, получим

$$x-\xi=\mu\int_0^t [X_0(x)-X_0(\xi)]dt+\mu\int_0^t [X(x, \psi)-X_0(x)]dt. \tag{11}$$

Используя условие Липшица для функции $X_0(x)$ с постоянной λ и обозначения п.2°, получим неравенство

$$|x-\xi|<\lambda\int_0^\tau |x-\xi|d\tau+\mu\int_0^t \hat{X}(x, \psi)dt. \tag{12}$$

7. Члены ряда $\hat{X}(x, \psi)$, сумму которых мы обозначим через $\tilde{X}(x, \psi)$, осциллируют с частотой, не меньшей $O(\sigma)$, пока интегральная кривая $x=x(t)$ находится вне полосы $P_k(\sigma)$, когда интегральная кривая входит в полосу $P_k(\sigma)$, $\exp \lambda_k t$ перестает осциллировать и ее следует оценивать по модулю на том отрезке времени, на котором решение находится в полосе $P_k(\sigma)$. Удобно представить $\hat{X}$ следующим образом:

$$X(x, \psi)=\tilde{X}(x, \psi)+\overline{X}_\sigma(x, \psi), \tag{13}$$

где члены ряда $\overline{X}_\sigma(x, \psi)$ отличны от 0 только на отрезках времени Δt_σ, подчиняющихся неравенству (10), на которых система пересекает поверхность резонанса. Таким образом,

$$\mu \left| \int_0^t \overline{X}_\sigma(x, \psi)\, dt \right| < \frac{\sigma}{a} \sum_k \max_{x\in D} |X_k(x)|. \tag{14}$$

Выберем теперь σ настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$\left| \mu \int_0^t \overline{X}_\sigma(x, \psi)\, dt \right| < e^{-\lambda L} \frac{\varepsilon}{3}, \quad L>0. \tag{15}$$

8. Для оценки $\mu \int_0^t \tilde{X}(x, \psi)\, dt$ на отрезке времени L/μ распространим интегрирование на весь отрезок, считая, что $\tilde{X}=0$ справа от t, и разделим его на части $l \leqslant \Delta t_i \leqslant 2l$, где l выберем ниже.

$$\int_0^{L/\mu} \tilde{X}(x, \psi)\, dt = \sum_i \mu \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\tilde{X}(x, \psi) - \tilde{X}(x_i, \psi)]\, dt + \mu \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{X}(x_i, \psi)\, dt; \tag{16}$$

здесь прибавили и вычли $\tilde{X}(x_i, \psi)$, где x_i — значения, которые принимает непрерывное решение $x=x(t)$ в точках разбиения. Поскольку $\tilde{X}(x_i, \psi)$ имеет нулевое среднее, существует также монотонно убывающая до 0 функция $f(t)$ такая, что

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{X}(x_i, \psi)\, dt \right| < \Delta t_i f(\Delta t_i). \tag{17}$$

Выберем теперь отрезки Δt и число l такими, чтобы

$$\mu \left| \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{X}(x_i, \psi)\, dt \right| < \mu f(l) \sum_i \Delta t_i \leqslant L f(l) < e^{-\lambda l} \frac{\varepsilon}{3}. \tag{18}$$

9. Далее, поскольку $|X(x, \psi)| < M$ при $x \in D$,

$$|x(t)-x_i| \leqslant \mu \int_{t_i}^{t_{i+1}} |X(x, \psi)|\, dt \leqslant \mu \cdot 2lM_0. \tag{19}$$

С учетом условия Липшица для $\tilde{X}(x, \psi)$, постоянной N и неравенства (19) получим

$$\sum_i \mu \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\tilde{X}(x, \psi) - \tilde{X}(x_i, \psi)|\, dt \leqslant \mu \cdot 2lMNL. \tag{20}$$

Выбирая теперь μ_0 достаточно малым, для всех $\mu<\mu_0$ получим

$$\sum_i \mu \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\tilde{X}(x,\psi)-\tilde{X}(x_i,\psi)|\,dt<e^{-\lambda L}\frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

10. Объединяя оценки (15), (18) и (21), для $\mu<\mu_0$ и $0<t<L/\mu$ получим

$$\left|\mu\int_0^t \hat{X}(x,\psi)\,dt\right|<e^{-\lambda L}\varepsilon. \tag{22}$$

Из последнего неравенства, неравенства (10) и леммы Гронуолла ([4]) следует при $0<t<L/\mu$

$$|x(t)-\xi(\mu t)|<\varepsilon. \tag{23}$$

Таким образом, справедлива следующая

11. Теорема. *Пусть для системы* (1) *выполняются общие условия п.*1 *и имеет место неравенство* (7) *п.*2; *тогда для всякого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* μ_0, *что при* $0<\mu<\mu_0$ *и* $0<t<L/\mu$, *где* L — *любое фиксированное число,*

$$|x(t)-\xi(t\mu)|<\varepsilon.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский,* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963. [2] *В. И. Арнольд,* ДАН, т. 161, № 1, 9 (1965). [3] *М. М. Хапаев,* Дифференциальные уравнения, т. 2, № 5, 600 (1966). [4] *Д. Сансоне,* Обыкновенные дифференциальные уравнения, ИЛ, 1953.