

Академик АН УзбССР Т. А. САРЫМСАКОВ, В. Г. ВИНОКУРОВ, В. И. ЧИЛИН

МЕРЫ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ БУЛЯ

В работе рассматриваются меры и внешние меры на топологических булевых алгебрах. Основной результат: на любой топологической булевой алгебре ∇ счетного типа существует мера, относительно которой все другие меры, заданные на ∇ , абсолютно непрерывны. Мы используем терминологию и обозначения из (1, 2).

1. Топологические алгебры Буля. Пусть ∇ — произвольная структурно полная булевая алгебра, θ — нулевой элемент в ∇ и τ — некоторая T_1 -топология в ней. Пару (∇, τ) будем называть топологической булевой алгеброй, если выполнены следующие условия:

A1. Операция $e \vee g$ непрерывна по совокупности переменных $e, g \in \nabla$.

A2. Элемент ce непрерывно зависит от e .

A3. Если M — такое подмножество булевой алгебры ∇ , что $\bigwedge M = \theta$ и U — произвольная окрестность нуля в (∇, τ) , то существует такой конеч-

ный набор e_1, \dots, e_k элементов множества M , что $\bigwedge_{i=1}^k e_i \in U$.

Будем говорить, что сеть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$, где A — некоторое направление, (o) -сходится к элементу e из ∇ , если существуют сети $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{b_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $a_\alpha, b_\alpha \in \nabla$, удовлетворяющие при любом $\alpha \in A$ неравенству $a_\alpha \leq e_\alpha \leq b_\alpha$, причем $\{a_\alpha\}$ возрастает, $\{b_\alpha\}$ убывает и $\sup_{\alpha \in A} a_\alpha = \inf_{\alpha \in A} b_\alpha = e$. Нетрудно видеть,

что условие A3 в определении топологической булевой алгебры эквивалентно следующему:

A3'. Если сеть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \nabla$, убывающая, (o) -сходится к нулю, то $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сходится к нулю в топологии τ .

Окрестность нуля U в булевой алгебре (∇, τ) называется заполненной, если из соотношений $e \leq g \in U$ вытекает $e \in U$.

Теорема 1. Во всякой топологической булевой алгебре существует базис заполненных окрестностей нуля.

В определении топологической булевой алгебры в работе (2), помимо условий A1–A3, требовалось существование базиса заполненных окрестностей нуля, что, как показывает предыдущая теорема, излишне.

Заметим также, что на всякой топологической булевой алгебре существует единственная топология, наделяющая ее структурой топологической булевой алгебры (3).

2. Меры на топологических булевых алгебрах. Непрерывной внешней мерой на булевой алгебре ∇ будем называть неотрицательную действительную функцию m , заданную на ∇ , удовлетворяющую следующим условиям:

M1. $m(e) \leq m(g)$ при $e \leq g$; $e, g \in \nabla$.

M2. $m(e \vee g) \leq m(e) + m(g)$ при всех $e, g \in \nabla$.

M3. Если есть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (o) -сходится к элементу e , то $\{m(e_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ сходится к $m(e)$.

Непрерывную внешнюю меру, удовлетворяющую условию аддитивности

M4. $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$ при $e \wedge g = \theta$; $e, g \in \nabla$,

будем называть мерой.

Нетрудно заметить, что из условия M4 вытекают M1 и M2. Если из $m(e) = 0$, $e \in \nabla$ следует $e = \theta$, то мера m называется строго положительной.

Мера m_1 называется абсолютно непрерывной относительно меры m_2 , если для всякого $e \in \nabla$, для которого $m_2(e) = 0$, вытекает $m_1(e) = 0$.

Булева алгебра называется алгеброй счетного типа, если в ней не существует более чем счетного числа попарно дизъюнктивных элементов ⁽⁴⁾.

Теорема 2. На всякой топологической булевой алгебре ∇ счетного типа существует мера, относительно которой все другие меры, заданные на ∇ , абсолютно непрерывны.

Из теоремы 2 и возможности разложения топологической булевой алгебры на компоненты счетного типа ⁽⁴⁾ следует

Теорема 3. Всякая топологическая булева алгебра ∇ представима в виде тихоновского произведения $\nabla = \nabla_0 \times \prod_{i \in I} \nabla_i$, где $\nabla_i, i \in I$, — булевы алгебры,

на которых существуют строго положительные меры, а ∇_0 — топологическая булева алгебра, на которой существует только тривиальная (тождественно равная нулю) мера.

Насколько известно авторам, вопрос о существовании топологической булевой алгебры, на которой можно определить только тривиальную меру, остается открытым (ср. ^(5, 6)).

Отметим, что в основе доказательства теоремы 2 лежит следующее

Предложение 1. Если на топологической булевой алгебре ∇ счетного типа существует строго положительная мера со значениями в тихоновском полуполе R^Δ *, то на ∇ существует строго положительная числовая мера.

3. Гильбертово пространство, ассоциированное с полуполем. Приведенное ниже определение гильбертова пространства, ассоциированного с полуполем, обобщает конструкцию Макки ⁽⁷⁾, стр. 160).

Пусть E — произвольное полуполе и ∇ — булева алгебра его идемпотентов; θ — нулевой элемент, а 1 — единица в E . Рассмотрим множество H всевозможных пар (m, f) , где m — мера на ∇ , $f \in E$, $|f| = 1 - e_m$, а $e_m = \bigvee \{e: e \in \nabla, me = 0\}$. Через m_0 обозначим тривиальную меру на ∇ . Введем в H операции сложения, умножения на действительное число и скалярного произведения следующим образом:

а) $(m_1, f_1) + (m_2, f_2) = (m, f)$, где

$$m(e) = \int_e \left| f_1 \sqrt{\frac{dm_1}{dm_3}} + f_2 \sqrt{\frac{dm_2}{dm_3}} \right|^2 dm_3, \quad e \in \nabla,$$

$$f = \left(f_1 \sqrt{\frac{dm_1}{dm_3}} + f_2 \sqrt{\frac{dm_2}{dm_3}} \right) \left| f_1 \sqrt{\frac{dm_1}{dm_3}} + f_2 \sqrt{\frac{dm_2}{dm_3}} \right|^{-1};$$

б) $\lambda(m, f) = \left(\lambda^2 m, \frac{\lambda}{|\lambda|} f \right)$ при $\lambda \neq 0$ и $0 \cdot (m, f) = (m_0, \theta)$;

в) $((m_1, f_1), (m_2, f_2)) = \int f_1 f_2 \sqrt{\frac{dm_1}{dm_3} \frac{dm_2}{dm_3}} dm_3$

здесь m_3 — любая мера на ∇ , относительно которой m_1 и m_2 абсолютно непрерывны.

Предложение 2. Множество H относительно введенных операций является гильбертовым пространством.

Определенное таким образом гильбертово пространство H будем называть ассоциированным с полуполем E . Будем говорить, что мера m , заданная на булевой алгебре ∇ , имеет счетный базис, если существует такая счетная система $M = \{e_n\} \subset \nabla$, $n = 1, 2, \dots$, что для любых $e \in \nabla$ и $\varepsilon > 0$ суще-

* Определение меры со значениями в полуполе R^Δ см. ⁽³⁾.

ствует элемент $e_n \in M$ такой, что $m(e \Delta e_n) < \epsilon$, где $e \Delta e_n$ — симметрическая разность идемпотентов e и e_n .

Теорема 4. Пусть E — полуполе, ∇ — булева алгебра его идемпотентов и H — гильбертово пространство, ассоциированное с E . Тогда следующие два условия эквивалентны:

1) H сепарабельно;

2) на ∇ существует мера со счетным базисом, относительно которой все другие меры, заданные на ∇ , абсолютно непрерывны.

4. Внешние меры на топологических булевых алгебрах. Полуполе E будем называть полуполем счетного типа, если в нем не существует более чем счетного числа попарно дизъюнктивных элементов (ср. (8), стр. 173). Пусть E — топологическое полуполе счетного типа с топологией t^* и ∇ — булева алгебра идемпотентов в E . Топология t индуцирует на ∇ топологию τ , причем (∇, τ) является топологической булевой алгеброй счетного типа. Тогда, как показали Т. А. Сарымсаков и А. Исламов (9), на ∇ существует строго положительная непрерывная внешняя мера m . Будем говорить, что последовательность элементов $\{x_n\}$ из E сходит

ся по мере к элементу $x \in E$ ($x_n \xrightarrow{m} x$), если для любого $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\bigvee \{e : e \in \nabla, |x_n - x| e > \epsilon e\}) = 0.$$

Если же для любого $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\bigvee_{k \geq n} \{e : e \in \nabla, |x_k - x| e > \epsilon e\}) = 0,$$

то последовательность $\{x_n\}$ назовем сходящейся почти всюду ($x_n \xrightarrow{п.в.} x$).

Очевидно, что $x_n \xrightarrow{m} x$ ($x_n \xrightarrow{п.в.} x$) в том и только в том случае, когда

$|x_n - x| \xrightarrow{m} \theta$ ($|x_n - x| \xrightarrow{п.в.} \theta$). Подмножество $M \subset E$ называется ограниченным, если существует элемент $x \in E$ такой, что $|a| \leq x$ для всякого $a \in M$. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ назовем (o) -сходящейся к элементу $x \in E$ ($x_n \xrightarrow{(o)} x$), если множество $\{x_n, n=1, 2, \dots\}$ ограничено и

$$\sup_{1 \leq n < \infty} \inf_{k \geq n} x_k = x = \inf_{1 \leq n < \infty} \sup_{k \geq n} x_k.$$

Предложение 3. Пусть E — топологическое полуполе счетного типа, тогда:

1) для того чтобы $x_n \xrightarrow{m} x$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к элементу x в топологии t полуполя E ;

2) если $x_n \xrightarrow{п.в.} x$, то $x_n \xrightarrow{m} x$. Обратно, если $x_n \xrightarrow{m} x$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $k=1, 2, \dots$, такая, что $x_{n_k} \xrightarrow{п.в.} x$.

3) последовательность $\{x_n\}$ (o) -сходится к элементу x в том и только в том случае, когда $x_n \xrightarrow{п.в.} x$ и множество $\{x_n, n=1, 2, \dots\}$ ограничено.

Из п. 3 предложения 3 следует, что в произвольном полуполе счетного типа из сходимости последовательности почти всюду не следует, вообще говоря, ее (o) -сходимость. Ниже приводятся условия, когда эти два вида сходимостей совпадают. Полуполе E будем называть универсальным, если всякое его подмножество попарно дизъюнктивных элементов ограничено.

* Как известно (3), в E существует единственная топология, наделяющая E структурой топологического полуполя.

Предложение 4. Если E — универсальное полуполе счетного типа, то всякая последовательность элементов из E , сходящаяся почти всюду, ограничена.

Отсюда и из п. 3 предложения 3 следует

Теорема 5. Для того чтобы в полуполе E сходимость последовательностей почти всюду совпадала с (o) -сходимостью, необходимо и достаточно, чтобы E было универсальным.

Подмножество $A \subset E$ назовем (п.в.)-замкнутым ((os) -замкнутым), если для каждой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in A$, такой, что $x_n \xrightarrow{\text{п.в.}} x$ ($x_n \xrightarrow{(o)} x$) вытекает $x \in A$. Множество всех (п.в.)-замкнутых ((os) -замкнутых) подмножеств определяет в E топологию, которую будем называть (п.в.)-топологией ((os) -топологией). Нетрудно показать, что (п.в.)-топология ((os) -топология) является сильнейшей из топологий, для которых сходимость последовательности почти всюду ((o) -сходимость) влечет ее топологическую сходимость.

Предложение 5. Во всяком полуполе счетного типа (п.в.)-топология и топология t совпадают.

Отметим, что (os) -топология в произвольном полуполе, вообще говоря, не совпадает с топологией t . Так, например, если E — полуполе всех ограниченных числовых последовательностей, то (os) -топология в нем существенно сильнее топологии t . В то же время справедлива

Теорема 6. Во всяком универсальном полуполе счетного типа (п.в.)-топология, (os) -топология и топология t совпадают.

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
20 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Я. Антоновский, В. Г. Болжанский, Т. А. Сарымсаков, Топологические полуполя, Ташкент, 1960. ² М. Я. Антоновский, В. Г. Болжанский, Т. А. Сарымсаков, Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963. ³ Т. А. Сарымсаков, Б. А. Рубштейн, В. И. Чилин, ДАН, т. 216, № 6 (1974). ⁴ Д. А. Владимиров, Булевы алгебры, «Наука», 1969. ⁵ H. Gajman, Pacif. J. Math., v. 14, № 1, 61 (1964). ⁶ D. Maharam, Ann. Math., v. 48, 154 (1947). ⁷ Д. Макки, Лекции по математическим основам квантовой механики, М., 1965. ⁸ Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. ⁹ Т. А. Сарымсаков, А. Исламов, Докл. АН УзССР, № 4, 3 (1974).