Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 517.544+517.948.32 *МАТЕМАТИКА*

И. М. СПИТКОВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА СО СТРОГО НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 13 II 1974)

Рассматривается краевая задача Римана

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \tag{1}$$

для системы n пар функций на окружности Γ в классической постановке: матрица-функция $G(t)$ принадлежит классу $\Omega(\Gamma, n)$ невырождающихся на контуре Γ матриц-функций, элементы которых удовлетворяют условию Гёльдера $g_{ij}(t)\in H(\Gamma)$; вектор-функция $g(t)\in H(\Gamma)$. Решения ищутся также в классе $H(\Gamma)$.

Известно, что число решений однородной задачи (1) и число условий разрешимости неоднородной задачи выражаются через частные индексы матрицы-функции $G(t)$ [1, 2]. Поэтому проблема отыскания частных индексов является основной в теории разрешимости краевой задачи (1). Подсчет частных индексов не составляет труда, если заранее известно, что они устойчивы, т. е. не изменяются при возмущении матрицы, достаточно малом в смысле нормы

$$\max_{i,j}\sup_t|g_{ij}(t)|.$$

Б. В. Боярским [3], И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном [4, 5] был получен следующий критерий: частные индексы $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\ldots\geqslant\varkappa_n$ устойчивы тогда и только тогда, когда $\varkappa_1-\varkappa_n\leqslant 1$.

Этот критерий не позволяет эффективно решать вопрос об устойчивости частных индексов. Представляет интерес отыскание легко проверяемых достаточных признаков устойчивости частных индексов. Один такой признак устанавливается в настоящей работе.

1. Определение 1. Хаусдорфовым множеством $\mathscr{H}(A)$ матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется множество значений квадратичной формы $\sum a_{ij}\xi_i\bar\xi_j$ на единичной сфере $\sum|\xi_i|^2=1$ [6-8].

Определение 2. Матрицу A назовем строго невырожденной, если $\mathscr{H}(A)$ не содержит нуля.

Определение 2 оправдывается тем, что каждая строго невырожденная матрица невырождена.

Теорема 1. *Если матрица-функция $G\in\Omega(\Gamma, n)$ при всех $t\in\Gamma$ строго невырождена, то ее частные индексы одинаковы (и, значит, устойчивы).*

Доказательство. Хаусдорфово множество будем рассматривать как элемент метрического пространства $\mathfrak{M}$ замкнутых ограниченных подмножеств комплексной плоскости C, расстояние между которыми определяется формулой

$$\theta(A, B)=\max\{\sup_{a\in A}d(a, B),\quad \sup_{b\in B}d(b, A)\};$$

здесь $d(p, N)$ означает расстояние от точки $p\in C$ до подмножества $N\subset C$. Рассмотрим отображение χ: $\Gamma\to\mathfrak{M}$, ставящее точке $t\in\Gamma$ в соответствие хаусдорфово множество матрицы $G(t)$. Из оценки

$$\left|\sum g_{ij}(t_1)\xi_i\bar{\xi}_j-\sum g_{ij}(t_2)\xi_i\bar{\xi}_j\right|\leqslant\max_{i,j}|g_{ij}(t_1)-g_{ij}(t_2)|\cdot\left(\sum|\xi_i|\right)^2$$

вытекает, что отображение χ гёльдеровское. Из непрерывности χ и соотношения $|d(p, A)-d(p, B)|\leqslant\theta(A, B)$, справедливо при всех $A, B\in\mathfrak{M}$, $p\in C$, следует непрерывная зависимость расстояния $d(0, \chi(t))$ от $t\in\Gamma$. Согласно условию теоремы, эта величина принимает лишь положительные значения. Следовательно, найдется такая постоянная $r>0$, что $d(0, \chi(t))\geqslant r$ при всех $t\in\Gamma$.

В силу выпуклости хаусдорфова множества, $\chi(t)$ заключено между проведенными из нуля опорными лучами l_1 и l_2, образующими угол $\alpha(t)<\pi$. Можно установить непрерывную зависимость $\alpha(t)$ от $t\in\Gamma$, из которой вытекает существование постоянной $\alpha_0>0$ такой, что $\pi-\alpha(t)\geqslant\alpha_0$ при всех $t\in\Gamma$.

Пусть β — угол, образованный биссектрисой угла между l_1 и l_2 с положительной полуосью Ox. Положим $\psi(\chi(t))=\exp(-i\beta)$. Из геометрических соображений устанавливается, что если $\theta(\chi(t_1), \chi(t_2))=\delta<r\sin{}^1/_4\alpha_0$, то

$$|\psi(\chi(t_1))-\psi(\chi(t_2))|^2\leqslant2(1-(1-\delta^2/r^2)^{1/2}),$$

т. е. ψ: $\chi(\Gamma)\to C$ — функция из класса Липшица.

Функция $\varphi=\psi\circ\chi$: $\Gamma\to C$ является гёльдеровской как суперпозиция гёльдеровских функций. Поэтому матрица-функция $G_1=\varphi G$ принадлежит классу $\Omega(\Gamma, n)$. Хаусдорфово множество матрицы $G_1(t)$ расположено в открытой правой полуплоскости. Иначе говоря, $G_1(t)$ имеет положительно определенную вещественную часть при всех $t\in\Gamma$. Следовательно, частные индексы G_1 равны нулю [4]. Остается лишь заметить, что умножение матрицы-функции на скалярную функцию не может нарушить равенство частных индексов.

Определение 3. Собственные числа матрицы $G(t)$, рассматриваемые как функции аргумента t, называются **характеристическими функциями** [9].

Следствие 1. *Частные индексы строго невырожденной матрицы совпадают с индексами Коши ее характеристических функций.*

Действительно, множество $\mathscr{H}(A)$ содержит выпуклую оболочку спектра матрицы A [7, 8]. Поэтому все значения характеристических функций матрицы $G_1(t)$ лежат в правой полуплоскости и, следовательно, их индексы Коши равны нулю. Индексы Коши характеристических функций $G(t)$ равны $-(1/2\pi)\{\arg\varphi(t)\}_\Gamma$, т. е. совпадают с ее частными индексами. Таким образом, нами выделен класс матриц-функций, для которых частные индексы совпадают с индексами Коши собственных чисел. Описание всех таких матриц-функций составляет проблему, поставленную Ф. Д. Гаховым [9].

Следствие 2. *Правые индексы строго невырожденной матрицы совпадают с ее частными индексами.*

Правые индексы матрицы $G(t)$ совпадают с частными индексами транспонированной матрицы $G'(t)$ [4]. Поскольку $\mathscr{H}(G)=\mathscr{H}(G')$, остается лишь применить теорему 1 к $G'(t)$.

Следствие 3. *Если $G\in\Omega(\Gamma, n)$ при всех $t\in\Gamma$ является нормальной матрицей (т. е. $GG^*=G^*G$, где $G^*=\bar{G}'$), выпуклая оболочка спектра которой не содержит нуля, то частные индексы $G(t)$ одинаковы.*

Для доказательства нужно заметить, что хаусдорфово множество нормальной матрицы совпадает с выпуклой оболочкой ее спектра [8].

Применяя следствие 3 к эрмитовой матрице, получим известный результат о равенстве нулю частных индексов знакоопределенной матрицы [4, 10].

При $n=2$ следствие 3 принимает вид: *если отношение характеристических функций $\lambda_1(t)/\lambda_2(t)$ нормальной матрицы $G\in\Omega(\Gamma, 2)$ ни при каком $t\in\Gamma$ не является отрицательным числом, то частные индексы матрицы $G(t)$ совпадают.*

В связи с этим представляет интерес следующий пример [10]:

$$G(t)=\begin{pmatrix} t^k+t^{-k} & -t^k+t^{-k} \\ t^k-t^{-k} & -t^k-t^{-k} \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1(t)=2$; $\lambda_2(t)=-2$, так что $\lambda_1(t)/\lambda_2(t)=-1$. Матрица $G(t)$ эрмитова и, значит, нормальна. Факторизация в данном случае проводится эффективно и показывает, что частные индексы G есть k и $-k$.

Следствие 4. *Пусть $G\in\Omega(\Gamma, 2)$; $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — собственные числа матрицы $G(t)$, x_1 и x_2 — отвечающие им нормированные собственные вектора. Если при этом $|\lambda_1(t)|+|\lambda_2(t)|>|\lambda_1(t)-\lambda_2(t)|/(1-|(x_1, \; x_2)|^2)^{1/2}$ в тех точках t, в которых $\lambda_1(t)\neq\lambda_2(t)$, и $2|\lambda(t)|>\|G(t)-\lambda(t)I\|$ в тех точках t, в которых $\lambda_1(t)=\lambda_2(t)=\lambda(t)$, то частные индексы $G(t)$ одинаковы*.*

2. Рассмотрим краевую задачу (1) с матрицей $G\in\Omega(\Gamma, 2)$, один из элементов которой нигде на Γ не обращается в нуль. Эта задача эффективно сводится к задаче с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & 1+\omega^2 \end{pmatrix}, \quad \omega\in H(\Gamma) \quad [11]. \tag{2}$$

Из полученных нами результатов вытекает

Теорема 2. *Если значения функции ω заключены в открытой полосе ширины 2, параллельной оси Ox, то частные индексы матрицы (2) равны нулю.*

Задача (1) с эрмитовой матрицей $G\in\Omega(\Gamma, 2)$, один из диагональных элементов которой нигде на Γ не обращается в нуль, сводится к задаче с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & v \\ \bar v & |v|^2-1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Роль функции ω для (3) играет $i\,\mathrm{Im}\,((I+S)v)$, где S — оператор сингулярного интегрирования по контуру Γ.

Следствие. *Если функция $v_+={}^1/_2(I+S)v$ изменяется в открытой полосе ширины 1, параллельной оси Ox, то частные индексы матрицы (3) равны нулю.*

Все полученные выше результаты без изменений переносятся на случай, когда контур Γ — вещественная ось. Результаты сохраняются также, если задача (1) рассматривается в классе $L_p(\Gamma)$, а матрица-функция $G(t)$ предполагается лишь непрерывной.

Рассмотрим приложения полученных результатов к следующей краевой задаче линейного сопряжения:

$$\Phi^+(t)=a(t)\Phi^-(t)+b(t)\overline{\Phi^-(t)}+c(t). \tag{4}$$

Условие нётеровости этой задачи [12, 13]

$$a(t)\neq 0 \quad \text{при всех} \quad t\in\Gamma \tag{5}$$

в дальнейшем предполагается выполненным.

Задача (4) сводится к задаче (1) с матрицей

$$G=\frac{1}{\bar a}\begin{pmatrix} |b|^2-|a|^2 & b \\ \bar b & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

и называется устойчивой, если частные индексы матрицы (6) устойчивы [14].

* Под нормой матрицы понимается корень из наибольшего собственного числа ее произведения на сопряженную.

Известно ([15]), что задача (4) устойчива, если при всех $t\in\Gamma$

$$|a(t)|>|b(t)|.$$

Укажем еще два признака устойчивости задачи (4).

В силу условия (5) имеет место факторизация

$$|a(t)|^2=a^+(t)\overline{a^+(t)}.$$

Теорема 3. *Если функция* $(b/a^+)^-={}^1/_2(I-S)(b/a^+)$ *принимает значения в открытой полосе ширины* 1, *то задача* (4) *устойчива.*

Доказательство следует из теоремы 2.

Следующий признак применим в случае, когда $|a(t)|<|b(t)|$ при всех $t\in\Gamma$ и, значит, имеет место факторизация

$$|b(t)|^2-|a(t)|^2=g^+(t)\overline{g^+(t)}.$$

Теорема 4. *Если множество значений функции* b/g^+ *можно отделить от нуля некоторой касательной к единичному кругу, то задача* (4) *устойчива.*

Доказательство основано на применении следствия 4 теоремы 1.

Теоремы 3 и 4 можно доказать иным методом, используя некоторые результаты А. М. Николайчука ([15]).

Автор выражает благодарность Ф. Д. Гахову за интерес к работе и Г. С. Литвинчуку за научное руководство.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
11 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [2] *Н. П. Векуа*, Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970. [3] *Б. В. Боярский*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 21, № 4, 391 (1958). [4] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, УМН, т. 13, в. 2, 3 (1958). [5] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, ДАН, т. 119, № 5, 854 (1958). [6] *O. Toeplitz*, Math. Zs., B. 2, 187 (1918). [7] *F. Hausdorf*, Math. Zs., B. 3, 314 (1919). [8] *М. Маркус, Х. Минк*, Обзор по теории матриц и матричных неравенств, М., 1972. [9] *Ф. Д. Гахов*, УМН, т. 7, в. 4, 3 (1952). [10] *Ю. Л. Шмульян*, УМН, т. 8, в. 2, 143 (1953). [11] *В. Г. Кравченко, А. М. Николайчук*, Дифференциальные уравнения, т. 9, в. 2, 374 (1973). [12] *Б. В. Боярский*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 25, № 4, 385 (1960). [13] *Л. Г. Михайлов*, Изв. АН СССР, т. 27, № 5, 969 (1969). [14] *Г. С. Литвинчук*, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 12, 47 (1967). [15] *А. М. Николайчук*, Кандидатская диссертация, Одесса, 1973.