Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ФЕДОРЧУК

БИКОМПАКТЫ БЕЗ КАНОНИЧЕСКИХ КОРРЕКТНЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 II 1974)

Замкнутое множество называется корректным, если оно есть множество типа G_δ; открытое — если оно есть F_σ. Очевидно, корректные открытые множества являются дополнениями к корректным замкнутым, и наоборот. В работе доказывается следующая

Теорема. *Для всякого $n\geqslant 2$ существует n-мерный бикомпакт Z_n, в котором нет канонических корректных собственных подмножеств.*

Замечание 1. Существует и одномерный бикомпакт с таким же свойством, но размеры статьи не позволяют дать доказательство этого факта.

Замечание 2. С задачей Фринк о том, всякое ли бикомпактное расширение имеет волмэновский тип (см. ([3])), тесно связана задача о том, во всяком ли бикомпакте существует база-кольцо * из канонически замкнутых множеств. Насколько известно автору, бикомпакт Z_n является первым примером бикомпакта, в котором нет базы-кольца из канонически замкнутых G_δ-множеств.

Лемма 1. *Пусть X — бикомпакт, V — его собственное канонически открытое подмножество и n — произвольное натуральное число. Пусть, кроме того, граница множества V содержит точку x_0, характер бикомпакта X в которой счетен.*

Тогда существует такой бикомпакт $Y=Y(X, x_0, V)$ и такая неприводимая проекция π: $Y\to X$ что:

1) *множество $\pi^{-1}V$ не канонически открыто,*

2) *для всякой точки $x\in X$, $x\neq x_0$, прообраз $\pi^{-1}x$ состоит из одной точки;*

3) $\pi^{-1}x_0\approx Q^n$.

Доказательство. Поскольку $x_0\in \mathrm{Гр}\, V$ и $\chi(x_0, X)=\aleph_0$, существует такая последовательность $C=\{y_m\}$, сходящаяся к точке x_0, что $y_m\in V$ для всякого m. Пусть $D=X\setminus(V\cup\{x_0\})$ и $\{z_0, z_1, \ldots, z_m, \ldots\}$ — счетное плотное в Q^n множество. Положим $fD=z_0$ и $fy_m=z_m$, $m=1, 2, \ldots$ Очевидно, что отображение f: $C\cup D\to Q^n$ непрерывно.

Поскольку $\chi(x_0, X)=\aleph_0$, пространство $X\setminus\{x_0\}$ нормально как F_σ-подмножество в нормальном пространстве X. По теореме Урысона отображение f можно продолжить до непрерывного отображения g: $X\setminus\{x_0\}\to Q^n$. Положим теперь $Y=B\{X, Y_x, h_x\}$ (см. ([6])), где $Y_{x_0}=Q^n$ и $h_{x_0}=g$, $Y_x=\{x\}$ и h_x: $X\setminus\{x\}\to\{x\}$ — постоянное отображение при $x\neq x_0$. Проекция π: $Y\to X$, определенная равенствами $\pi^{-1}x=Y_x$, удовлетворяет свойствам 2) и 3) леммы 1 (см. ([6])). Легко показать, что $\pi^{-1}x_0\subset[\pi^{-1}V]$ и всякая точка $z\in\pi^{-1}x_0$, $z\neq z_0$, является внутренней точкой множества $[\pi^{-1}V]$. Отсюда следует, что отображение π неприводимо, а множество $\pi^{-1}V$ не каноническое. Лемма 1 доказана.

---

* База, которая вместе с любыми двумя элементами содержит их пересечение и объединение.

Л е м м а 2. *Пусть дано произвольное натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует такой непрерывный* * *спектр $S=\{X_\alpha, \varpi_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha<\omega(\mathfrak{c})$, из бикомпактов и неприводимых отображений, что:*

1) $X_0=Q^n$;

2) для всякого $\alpha<\omega(\mathfrak{c})$ отображение $\varpi_\alpha^{\alpha+1}$ имеет только один нетривиальный прообраз, гомеоморфный Q^n.

3) для всякого $\alpha<\omega(\mathfrak{c})$ и всякого канонически открытого собственного подмножества $V\subset X_\alpha$ существует такое $\alpha'>\alpha$, что множество $(\varpi_\alpha^{\alpha'})^{-1}V$ не является канонически открытым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Z — произвольный сепарабельный бикомпакт. Тогда множество всех канонически открытых подмножеств Z имеет мощность $\leqslant\mathfrak{c}$.

Обозначим через φ_Z взаимно однозначное отображение множества собственных непустых канонически открытых подмножеств бикомпакта Z в множество $\mathfrak{A}=[0, \omega(\mathfrak{c}))$ порядковых чисел, меньших $\omega(\mathfrak{c})$. Для дальнейшего нам потребуется еще такая биекция λ: $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, что $\lambda(\alpha, \beta)\geqslant\beta$. Наконец, через p_i обозначим проекцию множества $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ на i-й сомножитель, $i=1, 2$.

Спектр S построим методом трансфинитной индукции. Положим $X_0=Q^n$ и предположим, что для всех $\alpha<\beta$, где $\beta<\omega(\mathfrak{c})$, построены такие сепарабельные бикомпакты X_α и неприводимые проекции $\varpi_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'}\to X_\alpha$, образующие непрерывный спектр S_β, что выполнены следующие свойства:

2_β) для всякого трансфинита α при $\alpha+1<\beta$ отображение $\varpi_\alpha^{\alpha+1}$ имеет один нетривиальный прообраз, гомеоморфный Q^n;

3_β) для всякого порядкового числа α при $\alpha+1<\beta$ существует такое $\alpha'>\delta=p_2\lambda^{-1}(\alpha)$, $\alpha'<\beta$, что множество $(\varpi_\delta^{\alpha'})^{-1}\varphi_{X_\delta}^{-1}\gamma$ **, где $\gamma=p_1\lambda^{-1}(\alpha)$, не является канонически открытым.

Заметим, что свойства 2_1) и 3_1) выполнены автоматически, ввиду отсутствия порядковых чисел α с $\alpha+1<1$. Построим теперь сепарабельный бикомпакт X_β и проекции ϖ_α^β: $X_\beta\to X_\alpha$ так, чтобы выполнялись свойства $2_{\beta+1}$ и $3_{\beta+1}$. Пусть сначала β есть предельное число. Положим тогда $X_\beta=\lim S_\beta$ и $\varpi_\alpha^\beta=\lim\limits_{\alpha'<\beta}\varpi_\alpha^{\alpha'}$. Проекции ϖ_α^β неприводимы, как пределы неприводимых отображений. Спектр $S_{\beta+1}=\{X_\alpha; \varpi_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha<\beta+1$, непрерывен по определению пространства X_β и проекций ϖ_α^β.

Бикомпакт X_β сепарабелен как неприводимый прообраз сепарабельного бикомпакта X_α при любом $\alpha<\beta$. Свойство $2_{\beta+1}$) выполнено автоматически, поскольку из $\alpha+1<\beta+1$ вытекает, что $\alpha+1<\beta$. По этой же причине из 3_β) следует $3_{\beta+1}$).

Пусть теперь $\beta=(\beta-1)+1$. Рассмотрим порядковое число $\delta=p_2\lambda^{-1}(\beta-1)$. По свойству биекции λ имеем $\delta\leqslant\beta-1$.

Положим $V=\langle[(\varpi_\delta^{\beta-1})^{-1}\varphi_{X_\sigma}^{-\gamma}\gamma]\rangle$, где $\gamma=p_1\lambda^{-1}(\beta-1)$. Тогда V есть собственное канонически открытое подмножество бикомпакта $X_{\beta-1}$. В самом деле, при $V=X_{\beta-1}$ множество $\varphi_{X_\delta}^{-1}\gamma$, как образ всюду плотного в пространстве $X_{\beta-1}$ множества $(\varpi_\delta^{\beta-1})^{-1}\varphi_{X_\delta}^{-1}\gamma$, было бы всюду плотно в X_δ. Но это противоречит тому, что в силу определения отображения φ_{X_δ}, множество $\varphi_{X_\delta}^{-1}\gamma$ является собственным канонически открытым подмножеством бикомпакта X_δ.

---

* Вполне упорядоченный спектр $S=S_\gamma=\{X_\alpha, \varpi_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha<\gamma$, называется непрерывным, если для всякого предельного $\beta<\gamma$ имеем $X_\beta=\lim S_\beta$, где $S\supset S_\beta=\{X_\alpha, \varpi_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha<\beta$ и $\varpi_\alpha^\beta=\lim\limits_{\alpha'<\beta}\varpi_\alpha^{\alpha'}$.

** Отображение φ_{X_δ} определено, поскольку по предположению индукции бикомпакт X_δ сепарабелен, $\delta=p_2\lambda^{-1}(\alpha)\leqslant\alpha$.

Тогда и множество $V_0 = (\tilde\omega_0^{\beta-1})^{\#} V$ является собственным канонически открытым подмножеством пространства $X_0 = Q^n$ и $[V_0] = \tilde\omega_0^{\beta-1}[V]$ (см. ([4])). Поэтому множество $\Phi = \mathrm{Гр}\, V_0$ является перегородкой в Q^n. Поскольку куб Q^n является n-мерным канторовым многообразием, $\dim \Phi \geqslant n-1 \geqslant 1$. Поэтому компакт Φ несчетен и, следовательно, имеет мощность континуума. Обозначим через A множество всех точек из X_0, прообразы которых относительно отображения ${}^{\beta-1}_{0}$ неодноточечны. В силу непрерывности спектра S_β и свойства 2_β) мощность множества A строго меньше, чем $\mathfrak{c}$. Поэтому в компакте Φ существует точка y_0, являющаяся точкой взаимной однозначности отображения $\tilde\omega^{\beta-1}_0$ *. Тогда в точке $x_0 = (\tilde\omega^{\beta-1}_0)^{-1} y_0$ характер бикомпакта $X_{\beta-1}$ счетен и $x_0 \in \mathrm{Гр}\, V$.

Положим теперь $X = X_{\beta-1}$. Мы находимся в условиях леммы 1. Бикомпакт $Y = Y(X, x_0, V)$ обозначим через X_β, а проекцию π — через $\tilde\omega^{\beta}_{\beta-1}$. Положим, наконец $\tilde\omega^{\beta}_{\alpha''} = \tilde\omega^{\beta-1}_{\alpha''}\tilde\omega^{\beta}_{\beta-1}$ для $\alpha'' \leqslant \beta-1$ и $S_{\beta+1} = \{X_\alpha, \tilde\omega_{\alpha}{}^{\alpha'}\}$, $\alpha < \beta+1$. Спектр $S_{\beta+1}$, очевидно, непрерывен, а его проекции неприводимы. Сепарабельность бикомпакта X_β вытекает из сепарабельности $X_{\beta-1}$ и неприводимости отображения $\tilde\omega^{\beta}_{\beta-1}$. Свойство $2_{\beta+1}$) вытекает из свойств 2) и 3) проекции π (лемма 1) и свойства 2_β).

Проверим свойство $3_{\beta+1}$). В силу 3_β), его надо проверять лишь для $\alpha = \beta-1$. Положим $\alpha' = \beta < \beta+1$. Тогда по свойству биекции λ имеем $\delta = p_2\lambda^{-1}(\beta-1) \leqslant \beta-1 < \beta = \alpha'$. Осталось показать, что множество $U = (\tilde\omega_{\delta}{}^{\beta})^{-1}\varphi_{X_\delta}{}^{-1}\gamma$ не является канонически открытым. Предположим, что это не так. Тогда канонически открыто множество $(\tilde\omega^{\beta}_{\beta-1})^{\#} U = (\tilde\omega^{\beta-1}_{\delta})^{-1}\varphi^{-1}_{X_\delta}\gamma$. Поэтому $(\tilde\omega^{\beta-1}_{\delta})^{-1}\varphi^{-1}_{X_\delta}\gamma = V$ и $U = (\tilde\omega^{\beta}_{\beta-1})^{-1}$. Но это противоречит свойству 1) проекции $\pi = \tilde\omega^{\beta}_{\beta-1}$.

Итак, методом трансфинитной индукции строится такой непрерывный спектр $S_{\omega(\mathfrak{c})} = S$ из бикомпактов и неприводимых отображений, что $X_0 = Q^n$ и выполнены свойства $2_{\omega(\mathfrak{c})}$) и $3_{\omega(\mathfrak{c})}$). Свойство $2_{\omega(\mathfrak{c})}$), очевидно, совпадает со свойством 2), проверяемым в лемме 2. Покажем, что спектр S удовлетворяет свойству 3). Пусть $\alpha < \omega(\mathfrak{c})$ и V — произвольное собственное канонически открытое подмножество бикомпакта X_α. Положим $\alpha'' = \lambda(\varphi_{X_\alpha} V, \alpha)$. Тогда $p_2\lambda^{-1}(\alpha'') = \alpha$. Применим свойство $3_{\omega(\mathfrak{c})}$) к порядковому числу α''. Существует такое $\alpha' > p_2\lambda^{-1}(\alpha'') = \alpha$, что множество $(\tilde\omega^{\alpha'}_{\alpha})^{-1}\varphi^{-1}_{X_\alpha}\gamma$, где $\gamma = p_1\lambda^{-1}(\alpha'') = \varphi_{X_\alpha} V$, не является канонически открытым. Теперь осталось заметить только, что $\varphi^{-1}_{X_\alpha}\gamma = \varphi^{-1}_{X_\alpha}\varphi_{X_\alpha} V = V$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. В качестве бикомпакта Z_n возьмем предел спектра S из леммы 2. Покажем, что $\dim Z_n = n$. Заметим сначала, что элементы X_α спектра S не более чем n-мерны. Это проверяется трансфинитной индукцией. На предельных трансфинитах используется непрерывность спектра S, на непредельных — свойство 2) спектра S и теорема Даукера о размерности объединения замкнутого и открытого подпространств (см. ([2])). Поэтому для бикомпакта $Z_n = \lim S$ имеем $\dim Z_n \leqslant n$. Теперь заметим, что для всякого $\alpha < \omega(\mathfrak{c})$ проекция $\tilde\omega^{1}$ спектра S обладает тем свойством, что прообразы всех точек ацикличны во всех размерностях. Поэтому, применяя теорему Вьеториса — Бегла — Скляренко (см. ([5])) и непрерывность когомологий при переходе к пределу обратного спектра, методом трансфинитной индукции несложно показать, что

---

* Это замечание, упрощающее первоначальное рассуждение автора, принадлежит В. Ульянову.

$\dim_G Z_n \geqslant n$ для всякой нетривиальности абелевой группы G, тем более $\dim Z_n > n$ и $\dim Z_n = n$.

Покажем теперь, что в Z_n нет собственных корректных канонических множеств. Предположим, что это не так. Тогда существует такое канонически открытое подмножество $V \subset Z_n$, $\emptyset \neq V \neq Z_n$, что $V = \cup F_i$, где F_i замкнуты в Z_n. Положим $\Phi = Z_n \setminus V$. Тогда $\Phi \cap F_i = \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Через $\tilde{\omega}_\alpha : Z_n \to X_\alpha$ обозначим предельную проекцию спектра S. Для всякого натурального i существует такое число $\alpha_i < \omega(\mathfrak{c})$, что $\tilde{\omega}_{\alpha_i} \Phi \bigcap \tilde{\omega}_{\alpha_i} F_i = \emptyset$ (см. ([1]), прибавление к гл. 1, § 1, предложение 10). Положим $\beta = \sup \alpha_i$. Поскольку $\mathrm{cf}\, \mathfrak{c} > \aleph_0$, имеем $\beta < \omega(\mathfrak{c})$. Тогда $\tilde{\omega}_\beta \Phi \cap \tilde{\omega}_\beta F_i = \emptyset$ для всякого $i = 1, 2, \ldots$, и следовательно, $\tilde{\omega}_\beta \Phi \cap (\cup \tilde{\omega}_\beta F_i) = \emptyset$. Но $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{\omega}_\beta F_i = \tilde{\omega}_\beta \bigcup F_i = \tilde{\omega}_\beta V$. Итак, $\tilde{\omega}_\beta \Phi \cap \tilde{\omega}_\beta V = \emptyset$.

Поскольку $\Phi \cup V = Z_n$, отсюда получаем равенства $\tilde{\omega}_\beta^{-1} \tilde{\omega}_\beta \Phi = \Phi$ и $\tilde{\omega}_\beta^{-1} \tilde{\omega}_\beta V = V$. Положим $U = \tilde{\omega}_\beta V = \tilde{\omega}_\beta^{\#} V$. Теперь заметим, что отображение $\tilde{\omega}_\beta$ неприводимо. Поэтому множество $U = \tilde{\omega}_\beta^{\#} V$ канонически открыто (см. ([4])). Согласно лемме 2 существует такое $\alpha > \beta$, что множество $W = (\tilde{\omega}_\beta^\alpha)^{-1} U$ не является канонически открытым. Но $V = \tilde{\omega}_\beta^{-1} U = (\tilde{\omega}_\beta^\alpha \tilde{\omega}_\alpha)^{-1} U = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} (\tilde{\omega}_\beta^\alpha)^{-1} U$, т. е. $V = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} W$ или $W = \tilde{\omega}_\alpha^{\#} V$. Поэтому, как и выше, из неприводимости $\tilde{\omega}_\alpha$ следует, что множество W канонически открыто. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров, Б. А. Пасынков*, Введение в теорию размерности, «Наука», 1973. [2] *C. N. Dowker*, Quart. J. Math., Ser. 2, v. 6, 101 (1955). [3] *O. Frink*, Am. J. Math., v. 86, № 3, 602 (1964). [4] *В. И. Пономарев*, Матем. сборн., т. 60, № 1, 89 (1963). [5] *Е. Г. Скляренко*, УМН, т. 19, в. 6, 47 (1964). [6] *В. В. Федорчук*, ДАН, т. 182, № 2, 275 (1968).