Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 1

УДК 513.82+511 *МАТЕМАТИКА*

М. И. ШТОГРИН

ЛОКАЛЬНО КВАЗИПЛОТНЕЙШИЕ РЕШЕТЧАТЫЕ УПАКОВКИ ШАРОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 18 II 1974)

1. Любой точке с координатами a_{ij}, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, в пространстве E^N размерности $N=n(n+1)/2$ поставим в соответствие ранг r и сигнатуру σ квадратичной формы $f(x)=\sum a_{ij}x_ix_j$, i, $j=1, 2, \ldots, n$; $a_{ji}=a_{ij}$. Множество точек пространства E^N, для которых $\sigma=r=n$, является конусом $\mathbf{K}$. Любое аффинное преобразование пространства E^N, при котором инвариантен конус $\mathbf{K}$, сохраняет ранг r и сигнатуру σ любой точки пространства E^N.

2. Любая линейная подстановка переменных x_i индуцирует некоторое аффинное преобразование S пространства E^N, при котором конус $\mathbf{K}$ инвариантен. Преобразование, индуцированное линейной подстановкой переменных x_i с целочисленной унимодулярной матрицей, обозначим через G. Любое аффинное преобразование, при котором инвариантен конус $\mathbf{K}$, является индуцированным, а если, кроме этого, инвариантна N-мерная решетка целочисленных форм-точек (a_{ij}), то оно является преобразованием G.

3. Множество точек конуса $\mathbf{K}$, для которых $\det(a_{ij})=\mathrm{const}$, назовем дискриминантной поверхностью и обозначим d. Поверхность d строго выпукла к началу O. Она гладкая и является G-инвариантной поверхностью. Если какое-либо G преобразует в себя некоторую положительную форму-точку (a_{ij}), то в силу аффинности оно преобразует в себя и взаимную ей форму-гиперплоскость $d^{-1}\sum A_{ij}\nu_{ij}=n$, касающуюся поверхности d в точке (a_{ij}).

Имеют место следующие дуальные между собой утверждения:

а) при любом t и любом ненулевом решении (p_{ij}) уравнения $\sum A_{ij}p_{ij}=0$ точка $(a_{ij}+tp_{ij})$ лежит в гиперплоскости $d^{-1}\sum A_{ij}\nu_{ij}=n$. При этом $\det(a_{ij}+tp_{ij})=d-o(t^2)$, где $o(t^2)$ — положительная бесконечно малая величина 2-го порядка по сравнению с t;

б) при любом t и любом ненулевом решении (p_{ij}) уравнения $\sum a_{ij}p_{ij}=0$ гиперплоскость $\sum(A_{ij}d^{-1}+tp_{ij})\nu_{ij}=n$ проходит через точку (a_{ij}), причем $\det(A_{ij}d^{-1}+tp_{ij})=d^{-1}-o(t^2)$.

4. Множество всех форм-точек с данным значением минимума и данными его представлениями, очевидно, представляет собой некоторый выпуклый многогранник. Всем внутренним точкам такого многогранника соответствуют одни и те же представления минимума, а в любой точке его границы соответствует хотя бы одно дополнительное представление минимума. Такой многогранник целиком принадлежит некоторому дискриминантному телу $d\geqslant d_0>0$. Многогранник этот ограничен или неограничен в зависимости от того, образуют или нет представления минимума n-мерную совокупность.

5. Если описанный в п. 4 многогранник состоит из одной точки, то соответствующая этой точке квадратичная форма вполне определяется значением минимума и всеми его представлениями, т. е. совершенна. Пусть, далее, такой многогранник не вырождается в точку.

Определение 1. Положительную квадратичную форму назовем квазисовершенной, если при любом приращении ее коэффициентов, сохраняющем значение минимума формы и все его представления, значение дискриминанта формы становится меньше исходного.

Т е о р е м а 1. *Представления минимума положительной квазисовершенной квадратичной формы образуют n-мерную совокупность.*

Пусть дана какая-либо положительная квадратичная форма, представления минимума которой образуют n-мерную совокупность, тогда справедлива

Т е о р е м а 2. *Существует и притом единственная положительная квазисовершенная квадратичная форма с тем же значением минимума и теми же его представлениями, что и у данной формы.*

При этом квазисовершенная форма может иметь еще несколько дополнительных представлений минимума.

Т е о р е м а 3. *Существует всего лишь конечное число неэквивалентных положительных квазисовершенных квадратичных форм с данным значением минимума.*

6. Еж минимумов n-мерной решетки Λ назовем к в а з и с о в е р ш е н н ы м (решетку Λ назовем к в а з и с о в е р ш е н н о й), если при любом аффинном преобразовании решетки Λ, достаточно близком к тождественному преобразованию и сохраняющем длины всех векторов ее ежа минимумов, объем параллелепипеда решетки Λ становится меньше исходного. В частности, еж минимумов решетки Λ является совершенным, если он не допускает аффинного преобразования решетки Λ, достаточно близкого к тождественному преобразованию и сохраняющего длины всех векторов ее ежа.

Т е о р е м а 4. *Квазисовершенный еж минимумов определяет квазисовершенную решетку с точностью до допустимой ее центрировки, не нарушающей значения минимума.*

Т е о р е м а 5. *Если квазисовершенный еж минимумов целиком содержится в какой-либо паре плоскостей, то плоскости этой пары ортогональны между собой.*

Т е о р е м а 6. *Прямое произведение квазисовершенных решеток с одним и тем же минимумом является квазисовершенным.*

7. Т е о р е м а 7. *При любом достаточно малом приращении коэффициентов положительной квазисовершенной квадратичной формы, сохраняющем значение этой формы и все его представления, дискриминант формы уменьшается на бесконечно малую величину 2-го порядка.*

О п р е д е л е н и е 2. Положительную квадратичную форму назовем к в а з и п р е д е л ь н о й, если при любом достаточно малом приращении ее коэффициентов, сохраняющем значение минимума формы, значение дискриминанта формы становится либо больше исходного, либо меньше его на бесконечно малую величину 2-го порядка.

Т е о р е м а 8. *Для того чтобы положительная квадратичная форма была квазипредельной, необходимо, чтобы она была квазисовершенной или совершенной.*

Аналогично предыдущему, прямое произведение квазипредельных решеток с одним и тем же минимумом является квазипредельным. Если квазипредельный еж минимумов содержит наименьшее возможное количество векторов, то соответствующая решетка либо просто кубическая, либо является ее центрировкой.

8. Теория предельных ([1]), совершенных ([2]), а также квазипредельных и квазисовершенных форм становится геометрически наглядной, если использовать совершенный полиэдр Π ([3]) и дуальный ему полиэдр $\mu(n)$ ([4]).

Если форма-гиперплоскость $\sum b_{ij}\nu_{ij}=n$ является опорной к полиэдру Π, то соответствующая ей форма-точка (b_{ij}) принадлежит дуальному полиэдру $\mu(n)$, и обратно.

Совершенные формы отвечают $(N-1)$-мерным граням полиэдра Π и вершинам $\mu(n)$. Их коэффициенты, очевидно, пропорциональны целым числам.

Т е о р е м а 9. *Если коэффициенты a_{ij} метрической квадратичной формы основного репера решетки Λ суть целые числа, то решетка Λ является* *либо прямоугольной, либо центрировкой прямоугольной решетки, а при двух дополнительных условиях* $\det(a_{ij})=1$ *и* $n\leqslant 7$ *решетка* Λ *заведомо кубическая.*

Заметим, что в случае $n=8$ коэффициенты a_{ij} метрической квадратичной формы основного репера известной [7] плотнейшей решетки являются целыми при условии $\det(a_{ij})=1$, но сама решетка является не кубической, а ее центрировкой.

Определение 3. Решетчатую упаковку шаров одинаковых радиусов, касающихся один другого, назовем **локально квазиплотнейшей**, если метрическая квадратичная форма основного репера решетки является квазипредельной.

9. Для практического разыскания квазисовершенных форм полезна

Теорема 10. *Все квазисовершенные формы содержатся среди точек касания плоскостей граней различных измерений полиэдра* $\mu(n)$ *к соответствующим дискриминантным поверхностям. Все формы, взаимные к квазисовершенным положительным квадратичным формам, находятся среди точек касания плоскостей граней различных измерений полиэдра* Π *к соответствующим дискриминантным поверхностям.*

Критерии квазипредельности аналогичны критериям предельности.

Теорема 11. *Опорная к* Π *положительная форма-гиперплоскость* $d^{-1}\sum A_{ij}\nu_{ij}=n$ *является квазипредельной тогда и только тогда, когда взаимная ей форма-точка* (a_{ij}) *принадлежит (как внутренняя точка, или точка границы) грани полиэдра* Π, *расположенной в этой гиперплоскости.*

Теорема 12. *Положительная форма-точка* $(A_{ij}d^{-1})$, *принадлежит полиэдру* $\mu(n)$, *является квазипредельной тогда и только тогда, когда взаимная ей форма-гиперплоскость* $\sum a_{ij}\nu_{ij}=n$ *опорна к полиэдру* $\mu(n)$.

10. Рассмотрим любую конечную группу целочисленных $(n\times n)$-матриц. По известной теореме Машке она индуцирует группу автоморфизмов некоторой положительной квадратичной формы-точки. Любое преобразование G этой группы преобразует в себя и взаимную форму-гиперплоскость. В пучке параллельных ей гиперплоскостей рассмотрим гиперплоскость, опорную к $\mu(n)$. Полное пересечение последней с полиэдром $\mu(n)$ представляет собой некоторую (ограниченную) грань F_1 полиэдра $\mu(n)$. Рассматриваемое G переводит в себя как грань F_1, так и точку M_1 этой грани с наибольшим значением d_1 дискриминанта, а значит, и касательную в M_1 к поверхности d_1 гиперплоскость P_1. Если гиперплоскость P_1 не опорна к $\mu(n)$, то рассмотрим параллельную ей гиперплоскость, опорную к $\mu(n)$. Последняя содержит новую грань F_2 полиэдра $\mu(n)$. Дискриминанты всех точек грани F_2 меньше, чем d_1. Рассматриваемое выше G преобразует в себя как грань F_2, так и ее точку M_2 наибольшего дискриминанта d_2. Так как $d_2<d_1$, то грань F_2 не эквивалентна F_1. Если гиперплоскость P_2, касательная в M_2 к поверхности d_2, не опорна к $\mu(n)$, берем параллельную ей гиперплоскость, опорную к $\mu(n)$, и продолжаем процесс далее. Ввиду конечности числа G неэквивалентных граней полиэдра $\mu(n)$ мы, наконец, получим точку M_k грани F_k такую, что касательная в M_k гиперплоскость к поверхности d_k является опорной к полиэдру $\mu(n)$. При рассматриваемом G точка $M_k=(a_{ij})_k$ переходит в себя. По теореме 12 форма-точка M_k является квазипредельной (или, в частности, предельной).

Теорема 13. *Все максимальные конечные группы целочисленных* $(n\times n)$*-матриц содержатся среди полных групп целочисленных автоморфизмов положительных квазипредельных квадратичных форм.*

11. Все положительные квазисовершенные формы при $n=2, 3, 4$ являются квазипредельными. В случае $n=4$ имеется всего 17 (на 1 меньше числа всевозможных неэквивалентных граней полиэдра Π, обладающими точками в конусе K) неэквивалентных квазипредельных форм, две из которых предельные (см. табл. 1). Полные группы автоморфизмов форм № 1, 8, 11—17 являются максимальными [5, 8] конечными группами целочисленных (4×4)-матриц (максимальные кристаллографические группы

Таблица 1

№ п/п	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{44}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{23}	a_{24}	a_{34}
1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
2	6	6	6	6	2	3	3	3	3	3
3	2	2	2	2	1	$\sqrt{3}-1$	1	1	$\sqrt{3}-1$	1
4	4	4	4	1	1	2	2	2	2	2
5	8	8	8	8	2	4	4	1	4	2
6	4	4	4	4	1	1	2	1	1	2
7	2λ	2λ	2λ	24	6	λ	12	6	12	12
8	2	2	2	2	1	1	0	1	0	0
9	4	4	4	4	1	2	0	2	0	0
10	6	6	6	8	2	3	4	1	4	2
11	2	2	2	2	0	1	0	0	1	0
12	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
13	3	3	4	3	1	2	0	2	0	0
14	4	4	6	6	1	3	2	2	3	4
15	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
16	2	2	2	2	0	1	1	1	1	1
17	4	4	4	4	1	2	2	2	2	1

Примечание. Здесь $\lambda=7+\sqrt{13}$.

поворотов представляют группы форм №№ 1, 11, 12, 16). В случае $n=3$ имеется 5 квазипредельных форм №№ 8, 9, 12, 13, 15, где $x_4=0$. В случае $n=2$ имеется две квазипредельные формы №№ 12, 13, где $x_3=x_4=0$.

Примечание. Отношение арифметического минимума положительной квадратичной формы от n переменных к корню n-й степени из ее дискриминанта является кусочно-гладкой функцией от коэффициентов формы. В работе исследуются все критические точки этой функции. Оказалось, что в пересечении дискриминантной поверхности с фундаментальной областью группы $\{G\}$ имеется всего лишь конечное число критических точек рассматриваемой функции и что все соответствующие критические значения эта функция принимает на стыках не менее чем n ее гладких кусков.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. Korkiue, G. Zolotareff,* Math. Ann., B. 11, 242 (1877). [2] *Г. Ф. Вороной,* Собр. соч., т. 2, 1952, стр. 171. [3] *Б. А. Венков,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, 37 (1940). [4] *Б. Н. Делоне, С. С. Рышков,* Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 112, 203 (1971). [5] *С. С. Рышков,* ДАН, т. 204, № 3, 561 (1972). [6] *H. Minkowski,* J. reine u. angew. Math., B. 129, 220 (1905). [7] *H. F. Blichfeldt,* Math. Zs., B. 39, 1 (1934). [8] *E. C. Dade,* Illinois J. Math., v. 9, 99 (1965).