Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 517.947 **МАТЕМАТИКА**

В. В. БАРКОВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ ТИПА ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 1 III 1974)

Впервые краевую задачу для уравнения Лапласа со спектральным параметром в граничном условии, заданном на всей границе ограниченной области, допускающей разделение переменных, детально исследовал В. А. Стеклов (см., например, ([1])). В последнее десятилетие изучение задач такого типа проводилось различными методами (см. обзор ([2])) как в нашей стране, так и за рубежом.

В этой заметке исследуются две задачи рассеяния в неограниченных областях для операторов, порожденных эллиптической задачей со спектральным параметром в граничном условии на части границы области.

Обозначим через G_0 слой трехмерного пространства, ограниченный плоскостями Γ, уравнение которой $x_3=0$, и Γ_0, уравнение которой $x_3=-h$, где h — положительное число. Пусть G_0 посредством деформации преобразуется в область G_φ, ограниченную Γ и поверхностью Γ_φ, уравнение которой $x_3=-h+\varphi(x_1, x_2)$. Здесь $\varphi(x_1, x_2)$ — однозначная, дважды непрерывно дифференцируемая функция точки $(x_1, x_2)\in R^2$, равная нулю вне ограниченной области $D\subset\Gamma_0$ и такая, что $\sup|\varphi(x_1, x_2)|\leq h$. Сужение $f(x)$ на Γ будем обозначать $f(\tilde{x})$, $x\in G_\varphi$, $\tilde{x}\in\Gamma$.

Рассмотрим задачи на спектре

$$(\Delta u)(x)=0,\ x\in G_\varphi;\quad \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\right|_\Gamma=\lambda u(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Gamma;\quad \left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{\Gamma_\varphi}=0; \tag{1}$$

$$(\Delta v)(x)=0,\ x\in G_0;\quad \left.\frac{\partial v(x)}{\partial x_3}+c(\tilde{x})v(x)\right|_\Gamma=\lambda v(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Gamma;\quad \left.\frac{\partial v(x)}{\partial x_3}\right|_{\Gamma_0}=0, \tag{2}$$

содержащие λ в граничных условиях на Γ.

С этими задачами тесно связаны задачи на собственные значения самосопряженных в $L_2(\Gamma)$ операторов B_φ и $L_C=B_0+C$. Здесь C — оператор умножения на функцию $c(\tilde{x})$; B_φ — замыкание в $L_2(\Gamma)$ оператора, построенного по закону $u(\tilde{x})=u(x)|_\Gamma\to\partial u(x)/\partial x_3|_\Gamma$ на сужениях функций $u(x)$, которые будут решениями задачи

$$(\Delta u)(x)=0,\ x\in G_\varphi;\quad u(x)|_\Gamma=u(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Gamma;\quad \left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{\Gamma_\varphi}=0;$$

здесь $u(\tilde{x})$ — дважды непрерывно дифференцируемые финитные функции; B_0 строится как B_φ, но при $\varphi(x_1, x_2)\equiv0$, т. е. в слое G_0.

В ([3]) показано, что оператор B_0 унитарно эквивалентен умножению на функцию $|\xi|\operatorname{th}|\xi|h$, $\xi=(\xi_1, \xi_2)\in\Gamma$, и, следовательно, имеет непрерывный спектр $[0, \infty)$. Задача на собственные значения для оператора B_0 имеет вид

$$(\Delta\psi)(x)=0,\ x\in G_0;\quad \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_3}\right|_\Gamma=\lambda\psi(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Gamma;\quad \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial n}\right|_{\Gamma_0}=0. \tag{3}$$

Если $k(\cdot)$ — функция, обратная функции $\eta \operatorname{th} \eta$, $\alpha(\lambda)=k(\lambda h)/h$, ν — орт на Γ, $C(b)=[b(b+1)/(2\pi)]^{1/2}$, $b>0$, то функция

$$\psi(x,\lambda)=C(b)\frac{\operatorname{ch}\alpha(\lambda)(h+x_3)}{\operatorname{ch}\alpha(\lambda)h}\exp\{-i\alpha(\lambda)\langle\tilde{x},\nu\rangle\} \qquad (4)$$

будет решением задачи (3), а ее сужение на Γ — плоские волны, нормированные в $L_2(\Gamma, d\tilde{x}/(1+|\tilde{x}|)^{2+b})$.

Операторы B_φ и L_C можно понимать как возмущения B_0. При таком подходе задачи (1), (2) легко сформулировать как задачи рассеяния на возмущении границы Γ_0 и на возмущении граничного условия потенциалом $c(\tilde{x})$ соответственно. Задачи рассеяния будем решать методом предельного поглощения, т. е. вначале решается задача, которую удовлетворяет рассеянная плоская волна, при $z=\lambda+i\varepsilon$, а затем совершается переход к пределу при $\varepsilon\to 0$. Для этого изучим ядро резольвенты (функцию Грина) каждого возмущенного оператора путем исследования соответствующего интегрального уравнения. Отметим, что согласно ([3]) функция Грина $R_\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, z)$ оператора B_φ является пределом функции $R_\varphi(\tilde{x}, y, z)$ при $y_3\to 0$.

Функция Грина невозмущенного оператора B_0 может быть получена с помощью преобразования Фурье и теоремы о вычетах в виде сходящегося ряда, позволяющего обосновать предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и доказать следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $z=\lambda+i\varepsilon$, $\alpha(\lambda)$ и $\varphi(x_1, x_2)$ такие, как указано выше. Тогда:*

1) *если y меняется в ограниченной части G_φ, $\varepsilon>0$, а $\tilde{x}=|\tilde{x}|\cdot\omega\to\infty$, то $R_\varphi(\tilde{x}, y, \lambda+i\varepsilon)$ убывает по экспоненциальному закону;*

2) *предел этой функции при $\varepsilon\to 0$ существует при всех $\lambda\in(-\infty, \infty)$ за исключением, возможно, конечного числа точек λ_k, $k=1, 2, \ldots, m$, дискретного спектра конечной кратности оператора B_φ, причем $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ может появиться лишь на ограниченной части $[0, \infty)$, которую можно оценить;*

3) *при $\lambda\notin\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ и $\tilde{x}=|\tilde{x}|\cdot\omega\to\infty$ имеет место асимптотическое представление*

$$R_\varphi(\tilde{x}, y, \lambda+i0)=C(\omega,\alpha(\lambda), y)\frac{e^{i\alpha(\lambda)|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|^{1/2}}+O(|\tilde{x}|^{-3/2}).$$

При $\lambda\to\infty$ равномерно относительно $\tilde{x}\in\Gamma$ и $y\in G_\varphi$ справедливо представление

$$R_\varphi(\tilde{x}, y, \lambda+i0)=c(\lambda, y_3)\frac{e^{i\lambda|\tilde{x}-\tilde{y}|}}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^{1/2}}+O(\lambda^{-3/2}),$$

где $c(\lambda, y_3)=i\sqrt{2/\pi}e^{-i\pi/4}\lambda^{1/2}e^{-\lambda|y_3|}(1+2h\lambda)^{-1}$.

Утверждения леммы справедливы и относительно $\tilde{y}\in\Gamma$, $x\in G_\varphi$.

Лемма 2. *Пусть $c(\tilde{x})$ — неотрицательная непрерывная функция, равная нулю вне ограниченной части Γ_C плоскости Γ, z и $\alpha(\lambda)$ — такие же, как и в лемме 1. Тогда:*

1) *при изменении $\tilde{y}$ в ограниченной части Γ и $\tilde{x}=|\tilde{x}|\omega\to\infty$ функция Грина $K_C(\tilde{x}, \tilde{y}, \lambda+i\varepsilon)$ оператора L_C убывает по экспоненциальному закону;*

2) *при всех $\lambda\in(-\infty, \infty)$ за исключением, возможно, конечного числа точек $\{\lambda_k\}_{=1}^{m'}$ дискретного спектра конечной кратности оператора L_C, расположенных на ограниченной части $[0, \infty)$, которую можно оценить, существует предел $K_C(\tilde{x}, \tilde{y}, \lambda+i0)$;*

3) *при $\lambda\notin\{\lambda_k\}_{k=1}^{m'}$ и $\tilde{x}=|\tilde{x}|\omega\to\infty$ справедливо асимптотическое представление*

$$K_C(\tilde{x},\tilde{y},\lambda+i0)=T_C(\omega,\alpha(\lambda),\tilde{y})\frac{e^{i\alpha(\lambda)|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|^{1/2}}+O(|\tilde{x}|^{-3/2})$$

равномерно относительно $\tilde{y}$ и λ.

При $\lambda\to\infty$ равномерно относительно $\tilde{x}, \tilde{y}\in\Gamma$ имеет место асимптотическое представление

$$K_C(\tilde{x},\tilde{y},\lambda+i0)=t_C(\lambda)\frac{e^{i\lambda|\tilde{x}-\tilde{y}|}}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^{1/2}}+O(\lambda^{-3/2}),$$

где $t_C(\lambda)=i\sqrt{2/\pi}e^{-i\pi/4}\lambda^{1/2}(1+2\lambda h)^{-1}$.

Эти леммы позволяют, видоизменяя должным образом технику работ ([4-6]), доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x_1, x_2)$ и $\alpha(\lambda)$ такие, как указано выше, $\lambda\in\in[0, \infty)$. Тогда при всех λ за исключением, возможно, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{m}$ задача* (1) *имеет единственное решение, сужение которого на Γ представимо в виде*

$$u(\tilde{x}, \lambda)=C(b)\exp\{-i\alpha(\lambda)\langle\tilde{x}, \nu\rangle\}+u_\varphi(\tilde{x}, \lambda), \tag{5}$$

где ν — фиксированный орт на Γ, $u_\varphi(\tilde{x}, \lambda)$ — сужение на Γ решения задачи

$$(\Delta u_\varphi)(x)=0,\ x\in G_\varphi;\quad \left.\frac{\partial u_\varphi(x)}{\partial x_3}\right|_\Gamma=\lambda u_\varphi(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Gamma;$$

$$\frac{\partial u_\varphi(x)}{\partial n}=0 \ \text{при}\ x\in\Gamma_\varphi\cap\Gamma_0,$$

$$\frac{\partial u_\varphi(x)}{\partial n}=-\frac{\partial\psi(x,\lambda)}{\partial n}\ \text{при}\ x\in\Gamma_\varphi\setminus(\Gamma_\varphi\cap\Gamma_0),$$

выделяемое принципом предельного поглощения. Рассеянная плоская волна при $\tilde{x}=|\tilde{x}|\omega\to\infty$ и $\lambda\notin\{\lambda_k\}_{k=1}^{m}$ допускает асимптотическое представление

$$u_\varphi(\tilde{x},\lambda)=A(\omega,\alpha(\lambda),\nu,\varphi)\frac{e^{i\alpha(\lambda)|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|^{1/2}}+O(|\tilde{x}|^{-3/2}).$$

При $\lambda\to\infty$ амплитуда рассеянной плоской волны представима в виде

$$A(\omega,\alpha(\lambda),\nu,\varphi)_{\lambda\to\infty}=A(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\varphi^+}e^{-i\lambda\langle\omega+\nu,\,\tilde{s}\rangle}e^{-2\lambda|\varphi(s_1,s_2)|}\,ds,$$

где $s=(s_1, s_2, s_3)$, $\tilde{s}=(s_1, s_2, 0)$, $A(\lambda)=-iC(b)\sqrt{2/\pi}e^{-i\pi/4}\lambda^{1/2}(e^{2\lambda h}+2\lambda h)^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2, $\lambda\in[0, \infty)$. Тогда при всех $\lambda\notin\{\lambda_k\}_{k=1}^{m'}$ задача* (2) *имеет единственное решение, сужение которого на Γ представимо в виде*

$$v(\tilde{x}, \lambda)=C(b)\exp\{-i\alpha(\lambda)\langle\tilde{x}, \nu\rangle\}+v_C(\tilde{x}, \lambda), \tag{6}$$

где $v_C(\tilde{x}, \lambda)$ — сужение на Γ решения задачи

$$(\Delta v_C)(x)=0,\ x\in G_0;\quad \frac{\partial v_C(x)}{\partial x_3}+c(\tilde{x})v_C(x)-\lambda v_C(x)|_\Gamma=-c(\tilde{x})\psi(\tilde{x},\lambda),$$

$$\tilde{x}\in\Gamma;\quad \left.\frac{\partial v_C(x)}{\partial x_3}\right|_{\Gamma_0}=0,$$

выделяемое принципом предельного поглощения.

Рассеянная плоская волна при $\tilde{x}=|\tilde{x}|\omega\to\infty$ и $\lambda\notin\{\lambda_k\}_{k=1}^{m'}$ допускает асимптотическое представление

$$v_C(\tilde{x},\lambda)=A_C(\omega,\alpha(\lambda),\nu)\frac{e^{i\alpha(\lambda)|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|^{1/2}}+O(|\tilde{x}|^{-3/2}).$$

При $\lambda\to\infty$ амплитуда рассеянной плоской волны представима в виде

$$A_C(\omega, \alpha(\lambda), \nu)_{\lambda\to\infty} = -C(b)\, t_C(\lambda) \int_\Gamma e^{-i\lambda\langle\omega+\nu,\, s\rangle} c(s)\, ds,$$

где орт ν определяет направление падающей плоской волны, а ω — отраженной плоской волны.

Укажем, что при решении задач рассеяния (1), (2) вместо принципа предельного поглощения можно использовать условие

$$|\tilde{x}| \left(\frac{\partial f}{\partial |\tilde{x}|} \mp i\alpha(\lambda) f \right)_{\tilde{x} \leqslant |\tilde{x}|\omega \to \pm\infty} = O(|\tilde{x}|^{-1/2}),$$

которое является условием излучения типа Зомерфельда.

Оператор L_C рассматривается в слое, поэтому с помощью преобразования Фурье по $\tilde{x}$ он может быть сведен к модели Фридрихса, детально изученной в ([6]). Однако в нашем случае ядро возмущающей интегральной добавки к оператору умножения на функцию $|\xi|\,\mathrm{th}\,|\xi|h$ имеет другое ограничение на бесконечности.

Отметим, что аналогичные результаты получаются и тогда, когда на Γ_φ ($\varphi(x_1, x_2)$ может тождественно равняться нулю) задано не условие Неймана, а условие Дирихле. В этом случае спектр невозмущенного оператора будет $[h^{-1}, \infty)$ — область значений функции $|\xi|\,\mathrm{cth}\,|\xi|h$ и, следовательно, возмущенные операторы B_φ' и L_C' могут иметь изолированные точки дискретного спектра конечной кратности, расположенные на $[(2h)^{-1}, h^{-1})$ и $[0, h^{-1})$ соответственно. Рассмотрение операторов $R_\varphi(L_C)$ и $B_\varphi'(L_C')$ позволяет изучить влияние различных граничных условий, заданных на Γ_φ, на спектр и решения указанных задач рассеяния.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
25 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. А. Стеклов*, Общие методы решения основных задач математической физики, Докторская диссертация, Петербург, 1901. [2] *Ю. М. Березанский*, Тр. семинара по функциональному анализу, в. 2, 4 (1970). [3] *В. В. Барковский*, Укр. матем. журн., т. 25, 2, 147 (1973). [4] *А. Я. Повзнер*, Матем. сборн., т. 32, 1, 109 (1953). [5] *Ю. М. Березанский*, Тр. Московск. матем. общ., т. 7, 3 (1958). [6] *Л. Д. Фадеев*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 73, 2, 292 (1964).