

Член-корреспондент АН СССР Л. Д. БАХРАХ,  
академик АН АрмССР М. М. ДЖАРБАШЯН, О. С. ЛИТВИНОВ

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ СИСТЕМЫ ОТРЕЗКОВ**

Как известно, при решении задачи синтеза для линейной антенны используется теорема Винера — Пэли ((<sup>1</sup>), стр. 23). Применяя эту теорему, можно определить, например, условия существования точного решения упомянутой выше задачи. В случае линейной антенны ядро соответствующего интегрального уравнения представляет собой ядро Фурье. Однако представляет интерес решить вопросы точного и приближенного синтеза антенны, которая является звездообразной системой отрезков (рис. 1). В частности, это может быть широко применяемая в радиоастрономии крестообразная антенна.

Интегральное уравнение, связывающее диаграмму направленности  $F(ka_{\max} \sin \vartheta, \varphi)$  ( $k=2\pi/\lambda$  — волновое число;  $a_{\max}$  — максимальный из отрезков  $OA_1, OA_2, \dots, OA_j, \dots, OA_p$ , см. рис. 1, соответственно равных  $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_p$ ; максимум берется по  $1 \leq j \leq p$ ,  $j$  — номер отрезка в порядке возрастания  $\varphi_j$ , который отсчитывается от оси  $OX$  против часовой стрелки;  $\vartheta, \varphi$  — сферические координаты точки наблюдения;  $p$  — число отрезков, составляющих звезду) с распределением тока  $J(re^{i\varphi'})$ , имеет вид \*

$$F(x, \varphi) = \int_{\{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^p} e^{ixr \cos(\varphi - \varphi')} J(re^{i\varphi'}) r dr d\varphi', \quad (1)$$

где: 1)  $x=ka_{\max} \sin \vartheta$ , угол  $\vartheta$  отсчитывается от оси  $OZ$  в плоскости, пересекающей  $XOY$  по лучу  $\varphi$  (рис. 2); 2)  $r$  и  $\varphi'$  — полярные координаты точки интегрирования в плоскости  $XOY$ ; 3)  $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^p$  — обозначение звездообразной системы отрезков, которая в плоскости комплексного переменного  $z=re^{i\varphi'}$  определяется так:

$$\{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^p: 0 \leq |z| \leq \sigma_j; \quad \arg z = \varphi_j; \quad \sigma_j = \frac{a_j}{\max_{1 \leq s \leq p} a_s}, \quad j=1, 2, \dots, p.$$

Первая задача сводится к определению класса функций диаграмм направленности  $F(x, \varphi)$ , для которых задача синтеза может быть строго решена, т. е. в результате решения (1) ток  $J(re^{i\varphi'})$  должен быть равным нулю вне отрезков, составляющих антенну. Если такой ток найден, то уравнение (1) будет иметь вид

$$F(x, \varphi) = \sum_{j=1}^p \int_0^{\sigma_j} e^{ixr \cos(\varphi - \varphi_j)} I_j(re^{i\varphi_j}) dr \quad (2)$$

\* Легко показать, что истинная диаграмма направленности  $\bar{F}(x, \varphi)$  плоского раскрыва может быть элементарно преобразована в функцию  $F(x, \varphi)$  связанную с поверхностными токами  $J(re^{i\varphi'})$  на раскрыве с помощью уравнения (1) и называемую поэтому в дальнейшем диаграммой направленности.

$$\mathbf{F}(x, \varphi) = \sum_{j=1}^p \mathbf{F}_j(x \cos(\varphi - \varphi_j)), \text{ где } \mathbf{F}_j(x) = \int_0^{\sigma_j} e^{i\tau x} \mathbf{I}_j(re^{i\varphi}) dr, \quad (3)$$

$\mathbf{F}_j(x)$  — «вклад» каждого отрезка в диаграмму направленности  $\mathbf{F}(x, \varphi)$ .

Функции  $\mathbf{F}_j(x \cos(\varphi - \varphi_j))$ ,  $j=1, 2, \dots, p$ , которые будем называть «парциальными» диаграммами, являются целыми первого порядка по  $x$ , причем их тип при  $\varphi = \varphi_j$  равен  $\sigma_j \leq 1$ . Кроме того, они интегрируемы с квадратом

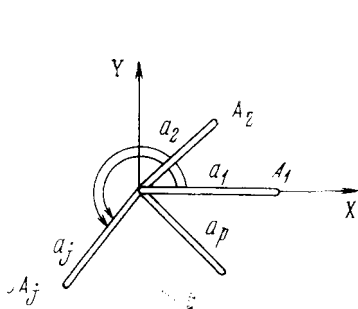


Рис. 1

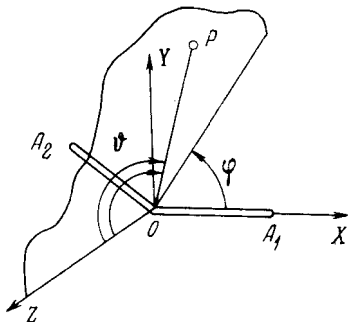


Рис. 2

на всей вещественной оси  $x$  и зависят от  $x \cos(\varphi - \varphi_j)$ . Парциальные диаграммы, обладающие такими свойствами, считаем принадлежащими классу  $W_{\sigma_j}^{(1)}(\varphi_j)$ . Таким образом, очевидно, что уравнение (1) имеет строгое решение в том и только в том случае, если  $\mathbf{F}(x, \varphi)$  принадлежит прямой сумме классов  $W_{\sigma_j}^{(1)}(\varphi_j)$ , т. е.  $\mathbf{F}(x, \varphi) \in \bigoplus_{j=1}^p W_{\sigma_j}^{(1)}(\varphi_j)$ ; иначе говоря, когда  $\mathbf{F}(x, \varphi)$  может быть представлена в виде суммы функций  $\mathbf{F}_j(x)$  таких, что  $\mathbf{F}_j(x \cos(\varphi - \varphi_j)) \in W_{\sigma_j}^{(1)}(\varphi_j)$ .

Из определения класса функций  $\bigoplus_{j=1}^p W_{\sigma_j}^{(1)}(\varphi_j)$  можно получить следующий критерий существования строгого решения (1):

- 1°)  $\mathbf{F}(x, \varphi)$  — целая функция по  $x$  первого порядка для любого  $\varphi$ .
- 2°) При любом  $\varphi$  тип функции  $\mathbf{F}(x, \varphi)$  определяется по формуле

$$h(\varphi, \mathbf{F}) = \max_{1 \leq k \leq p} \sigma_k |\cos(\varphi - \varphi_k)|,$$

$$3°) (\mathbf{I}_j, \mathbf{F}(x, \varphi_j)) \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty), \text{ т. е. } \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathbf{I}_j, \mathbf{F}(x, \varphi_j))|^2 dx < \infty,$$

где  $\mathbf{I}_j$  — орт в направлении  $j$ -го отрезка,  $j=1, 2, \dots, p$ .

После определения класса функций  $\mathbf{F}(x, \varphi)$ , дающих точное решение (1), перейдем к решению второй задачи, которая заключается в нахождении токов  $I(re^{i\varphi'})$ , когда  $re^{i\varphi'} \in \{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^p$  при условиях 1°)–3°) на  $\mathbf{F}(x, \varphi)$ . Это можно сделать, определив «вклад» каждого отрезка антенны в диаграмму направленности, т. е. надо определить парциальные диаграммы  $\mathbf{F}_j(x \cos(\varphi - \varphi_j))$  (2) и (3).

По аналогии с теорией линейной антенны интегральное преобразование Фурье известных «парциальных» диаграмм определяет конечные токи на отрезках.

Причем обращение тока в нуль на продолжении отрезков вытекает из теоремы Винера — Пели. Между отрезками равенство нулю тока следует

из теории обращения интеграла Фурье на системе лучей (3) в комплексной плоскости с помощью интегральных преобразований с ядром Миттаг — Леффлера <sup>(2)</sup>, стр. 224).

В самом деле, финитное решение (1) на  $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^p$  для токов  $I(re^{i\varphi})$  в этом случае дается следующей формулой:

$$I(re^{i\varphi'}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi\rho} \frac{d}{dr} \left\{ r^\mu \int_{-\infty}^{\infty} E_\rho((ix\tau)^{1/\rho} e^{i(\varphi-\varphi_k)}, \mu+1) (ix)^{\mu-1} F_k(-x) dx \right\}, \quad (4)$$

где  $F_k(-x) \equiv F_k(x \cos(\varphi-\varphi_k))|_{\varphi=\varphi_k+\pi}$  (см. (6));  $1/2 < \mu < 1/2 + 1/\rho$ .

Можно показать, что при  $\rho \rightarrow \infty$

$$I(re^{i\varphi_k'}) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixr}-1}{ix} F_k(x) dx, \quad (5)$$

причем  $I(re^{i\varphi'}) \equiv 0$  для  $\varphi' \neq \varphi_k$ .

Заметим, что по известным «парциальным» диаграммам  $F_j(x \cos(\varphi-\varphi_j))$  можно с помощью (5) находить токи  $I(re^{i\varphi_j})$ ,  $j=1, 2, \dots, p$ , на отрезках.

Для конструктивного решения задачи определения «парциальных» диаграмм следует использовать сечения пространственной диаграммы на лучах  $\{\varphi_s\}_{s=1}^p$ , т. е. функции  $F(x, \varphi_s)$ ,  $s=1, 2, \dots, p$ .

Целесообразность этого базируется на теореме о параметрическом представлении целых функций <sup>(2)</sup>, стр. 366) по их значениям на некоторой системе лучей  $\{\varphi_s\}_{s=1}^p$ . Поэтому можно попытаться по аналогии представить  $F(x, \varphi)$  в виде суммы парциальных диаграмм (2) и (3), которые определяются только по  $F(x, \varphi)$  на  $\{\varphi_j\}_{j=1}^p$ . Действительно,

$$F_j(x \cos(\varphi - \varphi_j)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \sum_{s=1}^p A_s^{(k)} (a_{sj}^{k+1})^{-1} \right] \frac{d^k}{dy^k} \left\{ \frac{e^{\sigma_j y} - 1}{y} \right\}, \quad (6)$$

$$j=1, 2, \dots, p, \quad y = ix \cos(\varphi - \varphi_j),$$

где  $A_s^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^{k+1}}{d\tau^{k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\tau} - 1}{-ix} F(x, \varphi_s) dx|_{\tau \rightarrow +0}$ ;  $(a_{sj}^k)^{-1}$  — элементы мат-

рицы, обратной матрице с элементами  $a_{sj}^k = 1/\cos^k(\varphi_s - \varphi_j)$ , причем  $a_{sj}^k \equiv 0$ , если  $\cos(\varphi_s - \varphi_j) < 0$ ,  $j, s=1, 2, \dots, p$ ;  $k=0, 1, 2, \dots$ .

Для иллюстрации метода рассматривается обратная задача для симметричной крестообразной антенны ( $\sigma_j=1$ ,  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=\pi/2-\varepsilon$ ,  $\varphi_3=\pi$ ,  $\varphi_4=\pi/2+\varepsilon$ ) с диаграммой\*

$$F(x, \varphi) = \frac{2}{x} \left\{ \frac{\sin(x \cos \varphi)}{\cos \varphi} + \frac{\sin(x \sin \varphi)}{\sin \varphi} \right\}.$$

Этот пример можно рассмотреть аналитически. Очевидно, все  $A_j^{(k)} \equiv 0$ ,  $k \geq 1$ . Из симметрии диаграммы заключаем, что достаточно для решения задачи искать парциальные диаграммы двух соседних отрезков, например первого и второго. Полагая  $\varphi_2 = \pi/2 - \varepsilon$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|a_{js}\|^{-1} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2), \quad j, s = 1, 2, 3, 4.$$

\* Для простоты синтезируется только одна декартова компонента  $F(x, \varphi)$  по оси  $Ox$ .  $\varepsilon$  — малое положительное число,  $j, s = 2, 3, 4$ .

При тех же условиях

$$A_1^{(0)} = 1/\epsilon + O(1), \quad A_2^{(0)} = 1/\epsilon + O(1).$$

В силу этого из (4) получаем

$$F_1(x \cos \varphi) = \frac{e^{ix \cos \varphi} - 1}{ix \cos \varphi}, \quad F_2(x \sin \varphi) = \frac{e^{ix \sin \varphi} - 1}{ix \sin \varphi}.$$

Результаты расчета для  $\epsilon=0,1$  по формуле (5) для  $\rho=10, 50$  приведены на рис. 3.

Идея задачи синтеза на звездообразной системе отрезков можно использовать и для решения некоторых других задач антенной техники, например,

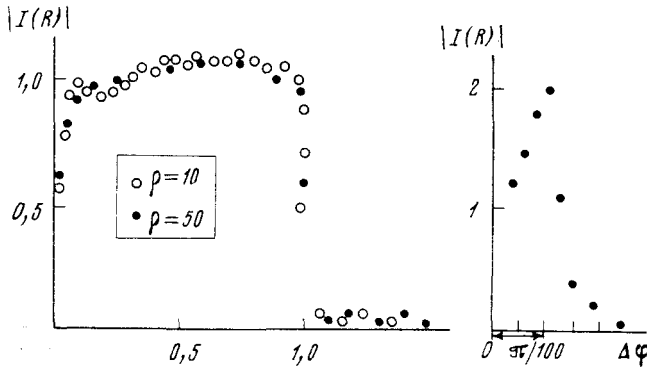


Рис. 3

в тех случаях, когда требуется определить роль того или иного участка раскрытия в формировании диаграммы антенны. В частности, можно оценить эффекты затенения линейчатой поверхностью раскрытия антенны. Это становится возможным благодаря рассмотренному алгоритму решения обратной задачи для системы отрезков, позволяющему оценить вклад отдельного отрезка, расположенного в раскрытии, в диаграмму антенны. Предполагая, что лучи (отрезки) лежат достаточно часто, можно рассчитать вклад отдельных секторов раскрытия в диаграмму направленности  $F(x, \varphi)$ .

В заключение рассмотрим случай, когда задача синтеза не может быть строго решена, т. е.  $F(x, \varphi) \notin \bigoplus_{j=1}^p W_{\sigma_j}^{(1)}(\varphi_j)$ . Ясно, что ни один из методов решения этой задачи не обуславливает «зануления» тока вне  $\{\mathcal{L}_{ij}\}_{j=1}^p$ , ток как бы «размазывается» в некоторой угловой области. Поэтому с практической точки зрения для лучшего приближения к заданной диаграмме можно систему звездообразных отрезков заменить системой угловых секторов с общей точкой в начале координат.

Поступило  
18 II 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Е. Г. Зелкин, Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности, М.—Л., 1963. <sup>2</sup> М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.