

Е. Б. ДЫНКИН

## МАРКОВСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IV 1974)

1. Обширный круг исследований по теории случайных процессов посвящен задаче: не меняя конечномерных распределений вероятностного процесса  $x_t$ , построить процесс с определенными свойствами регулярности траекторий. Соответствующая теория сложна и ее трудно применять к свойствам, которые важнее всего для изучения марковских процессов (строгая марковость, стандартность и т. п.).

Быть может, полезно изменить постановку задачи. При любом эксперименте наблюдается не состояние  $x_t$  в фиксированный момент  $t$ , а события, занимающие определенный промежуток времени. Это обстоятельство нашло отражение в теории обобщенных случайных процессов Гельфанда — Ито. Еще более общая концепция стохастического процесса как системы  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}(J)$ , находящихся в соответствии с промежутками времени  $J$ , была предложена в 1972 г. А. Н. Колмогоровым. Развивая его подход, мы введем понятие марковского представления  $x_t$  стохастической системы  $\mathcal{F}(J)$  и докажем существование регулярных представлений. Строятся два дуальных регулярных представления (правое и левое), которые затем объединяются в один марковский процесс двумя способами: «вертикальным» и «горизонтальным». Мы приходим к общей теории двойственности, в рамках которой находят естественное место основные результаты о пространствах входов и выходов, эксцессивных мерах и функциях, аддитивных функционалах и др. Первые шаги к построению такой теории были сделаны в (1). Приложениям к аддитивным функционалам посвящена заметка (2).

2. Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  и числовой интервал  $T = (\alpha, \beta)$ . Пусть каждому открытому интервалу  $J \subseteq T$  сопоставлена  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}(J)$ . Мы назовем  $\mathcal{F}(J)$  стохастической системой, если:

А)  $\mathcal{F}(J_1) \subseteq \mathcal{F}(J_2)$  при  $J_1 \subseteq J_2$ .

Б) Если  $J_n \uparrow J$ , то  $\mathcal{F}(J)$  порождается  $\sigma$ -алгебрами  $\mathcal{F}(J_n)$ .

В) Пусть  $J_n \uparrow J$  и пусть  $\mathbf{P}_n$  — вероятностная мера на  $\mathcal{F}(J_n)$ , причем  $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}_{n-1}(A)$  при  $A \in \mathcal{F}(J_{n-1})$ . Тогда существует мера  $\mathbf{P}_\infty$  на  $\mathcal{F}(J)$ , совпадающая с  $\mathbf{P}_n$  на  $\mathcal{F}(J_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$

Укажем важный способ построения таких систем. Пусть каждому  $t \in T$  сопоставлено борелевское измеримое пространство  $E_t$  и каждому конечному набору  $t_1, \dots, t_n$  сопоставлена вероятностная мера  $m_{t_1, \dots, t_n}$  в пространстве  $E_{t_1} \times \dots \times E_{t_n}$ . При обычных условиях согласованности этих мер по ним строится вероятностная мера  $\mathbf{P}$  в пространстве  $\Omega$  всех функций  $\omega(t) \in E_t$ ,  $t \in T$ . Пусть  $\mathcal{F}(J)$  —  $\sigma$ -алгебра в пространстве  $\Omega$ , порожденная отображениями  $x_t(\omega) = \omega(t)$  при  $t \in J$ . Набор  $\mathcal{F}(J)$  представляет собой стохастическую систему.

3. Под случайным процессом мы будем понимать набор измеримых отображений  $x_t(\omega)$ ,  $t \in T$ , вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  в борелевские измеримые пространства  $E_t$ . Случайный процесс  $x_t$  назовем марковским представлением стохастической системы  $\mathcal{F}(J)$ ,

если при  $t \in J$  отображение  $x_t$  измеримо относительно  $\mathcal{F}(J)$  и  $P\{\xi\eta|x_t\} = P\{\xi|x_t\}P\{\eta|x_t\}$  (п.н.  $P$ ) для любых  $t \in T$ ,  $\xi \in \mathcal{F}_{<t} = \mathcal{F}(\alpha, t)$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>t} = \mathcal{F}(t, \beta)$ . (Запись  $\xi \in \mathcal{F}$  означает, что  $\xi$  — неотрицательная  $\mathcal{F}$ -измеримая функция;  $P\xi$  означает интеграл  $\xi$  по мере  $P$ .)

Обозначим через  $\mathcal{F}(s, t]$   $\sigma$ -алгебру, порожденную  $\mathcal{F}(s, t)$  и  $x_t$ , и положим  $\mathcal{F}_{<t} = \mathcal{F}(\alpha, t]$ . Пусть каждому  $t \in T$ ,  $x \in E_t$  сопоставлена вероятностная мера  $P_{t,x}$  на  $\mathcal{F}_{>t}$ , причем:

- а)  $P_{s,x}\xi\eta = P_{s,x}\xi P_{t,x_t}\eta$  при  $s < t \in T$ ,  $\xi \in \mathcal{F}(s, t]$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>t}$ ;
- б)  $P\xi\eta = P\xi P_{t,x_t}\eta$  при  $t \in T$ ,  $\xi \in \mathcal{F}_{<t}$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>t}$ .

Тогда будем говорить, что  $P_{t,x}$  — переходные вероятности  $x_t$  или что  $(x_t, P_{t,x})$  — правое марковское представление  $\mathcal{F}(J)$ . Мы будем рассматривать также левые марковские представления  $(x_t, P_{t,x}^l)$  (копереходные вероятности  $P_{t,x}^l$  определены на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}_{<t}$ ) и двухсторонние марковские представления  $(x_t, P_{t,x}, P_{t,x}^l)$ .

Скажем, что правое представление  $(x_t, P_{t,x})$  разделяет состояния, если  $P_{t,x} \neq P_{t,y}$  при  $x \neq y$ . Будем говорить, что вероятностная мера  $P'$ , заданная на  $\mathcal{F}_{>s}$ , подчинена  $(x_t, P_{t,x})$  и будем писать  $P' \in K_s(x_t, P_{t,x})$ , если  $P'\eta = P'P_{t,x_t}\eta$  при всех  $t \in (s, \beta)$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>t}$ . Представление  $(\bar{x}_t, \bar{P}_{t,x})$  подчинено  $(x_t, P_{t,x})$ , если каждая мера  $\bar{P}_{t,x}$  подчинена  $(x_t, P_{t,x})$ , т.е. при любых  $s < t \in T$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>t}$   $\bar{P}_{s,x}P_{t,x_t}\eta = \bar{P}_{s,x}\eta$ . Два правых представления  $(x_t, P_{t,x})$  и  $(\bar{x}_t, \bar{P}_{t,x})$  назовем эквивалентными, если найдутся  $P$ -достоверное событие  $\Omega'$ , измеримые множества  $E'_t \in E_t$ ,  $\bar{E}'_t \in \bar{E}_t$  и изоморфизм  $\gamma: E'_t \rightarrow \bar{E}'_t$  такие, что  $P_{t,x} = \bar{P}_{t,\gamma(x)}$  при  $x \in E'_t$  и  $x_t(\omega) \in E'_t$ ,  $\gamma[x_t(\omega)] = \bar{x}_t(\omega)$  при  $\omega \in \Omega'$ . Все эти определения переносятся на левые и двухсторонние представления.

4. Правое марковское представление  $(x_t, P_{t,x})$  назовем регулярным, если его можно продолжить на интервал  $[\alpha, \beta)$  так, чтобы при любых  $\alpha < u < \beta$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>u}$  функция  $P_{t,x_t}\eta$  была непрерывна справа по  $t$  на  $[\alpha, u)$  п.н.  $P$ . Назовем его вполне регулярным, если при любых  $\alpha \leq s < u < \beta$ ,  $P' \in K_s(x_t, P_{t,x})$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>u}$  функция  $P_{t,x_t}\eta$  непрерывна справа по  $t$  на  $[s, u)$  п.н.  $P'$ . Используя методы (1), можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.** Для каждого правого марковского представления  $(x_t, P_{t,x})$  стохастической системы  $\mathcal{F}(J)$  найдется подчиненное ему правое вполне регулярное представление  $(x_{t+}, P_{t+}, x)$  разделяющее состояния и такое, что  $x_{t+}$  измеримо относительно  $\mathcal{F}(t, u)$  при любом  $u > t$ . Всякое правое регулярное представление, подчиненное  $(x_t, P_{t,x})$  и разделяющее состояния, эквивалентно  $(x_{t+}, P_{t+}, x)$ .

Представление  $(x_{t+}, P_{t+}, x)$  мы назовем регуляризацией правого представления  $(x_t, P_{t,x})$ . Аналогично определяется и регуляризация левого представления.

Пусть  $\mathcal{F}_{<t+}$  — пересечение  $\mathcal{F}_{<u}$  по всем  $u \in (t, \beta)$  и пусть  $K_s(x_t, P_{t,x})$  по всем  $s \in [\alpha, \beta)$ . Набор  $(x_{t+}, \mathcal{F}_{<t+}, K)$  является регулярным марковским классом в смысле (3) и, следовательно, обладает рядом важных свойств, доказанных в (3): строгая марковость, непрерывность справа эксцессивных функций вдоль почти всех траекторий и др.

5. Не каждая стохастическая система имеет марковские представления. Даже если такое представление существует, оно может не обладать переходными вероятностями. Выделим важный класс процессов  $x_t$ , для которых переходные и копереходные вероятности обязательно существуют.

Назовем случайный процесс  $x_t$  абсолютно непрерывным, если любое его конечномерное распределение  $m_{t_1, \dots, t_n}$  абсолютно непрерывно относительно произведения  $m_{t_1} \times \dots \times m_{t_n}$  соответствующих одномерных распределений. Если  $x_t$  — марковское представление, достаточно потребовать, чтобы это условие выполнялось при  $n=2$ .

**Теорема 2.** Если  $x_t$  — абсолютно непрерывное марковское представление стохастической системы  $\mathcal{F}(J)$ , то плотность  $p(s, x; t, y)$  меры  $m_{s,t}$

стационально  $m_t \times m_t$ , может быть выбрана так, чтобы при любых  $s < t < u \in T$ ,  $x \in E_s$ ,  $y \in E_t$

$$\int p(s, x; t, z) m_t(dz) p(t, z; u, y) = p(s, x; u, y) \quad (1)$$

и при любых  $s < t \in T$ ,  $x \in E_s$ ,  $y \in E_t$

$$\int m_s(dz) p(s, z; t, y) = \int p(s, x; t, z) m_t(dz) = 1. \quad (2)$$

С помощью этой плотности (мы назовем ее фундаментальной) можно построить переходные и копереходные вероятности  $x_t$  по формулам

$$P_{t, x} \eta = P p(s, x; t, x) \eta \quad \text{при } s < t \in T, \quad \eta \in \mathcal{F}_{>t}, \quad (3)$$

$$P^{u, x} \xi = P \xi p(t, x; u, x) \quad \text{при } t < u \in T, \quad \xi \in \mathcal{F}_{<t}. \quad (4)$$

6. Допустим, что стохастическая система  $\mathcal{F}(J)$  имеет какое-нибудь абсолютно непрерывное марковское представление  $x_t$ . По теореме 2 у нее есть правое представление  $(x_t, P_{t, x})$  и левое представление  $(x_t, P^{t, x})$ ; обозначим их регуляризации через  $(x_{t+}, P_{t+, x})$  и  $(x_{t-}, P^{t-, x})$ . Нетрудно показать, что  $x_{t+}$  и  $x_{t-}$  абсолютно непрерывны и их фундаментальные плотности  $p(s+, x; t+, y)$  и  $p(s-, x; t-, y)$  можно выбрать так, чтобы меры  $P_{t+, x}$  и  $P^{t-, x}$  выражались формулами

$$P_{s+, x} \eta = P p(s+, x; t+, x_{t+}) \eta, \quad \alpha \leq s < t < \beta, \quad \eta \in \mathcal{F}_{>t}, \quad (5)$$

$$P^{u-, x} \xi = P \xi p(t-, x_{t-}; u-, x), \quad \alpha < t < u \leq \beta, \quad \xi \in \mathcal{F}_{<t}. \quad (6)$$

По теореме 2 можно определить переходные вероятности  $x_{t-}$  и копереходные вероятности  $x_{t+}$  формулами

$$P_{s-, x} \eta = P p(s-, x; t-, x_{t-}) \eta, \quad \alpha < s < t \leq \beta, \quad \eta \in \mathcal{F}_{>t}, \quad (7)$$

$$P^{u+, x} \xi = P \xi p(t+, x_{t+}; u+, x), \quad \alpha \leq t < u < \beta, \quad \xi \in \mathcal{F}_{<t}. \quad (8)$$

Теорема 3. При надлежащем выборе фундаментальных плотностей (совместимом с формулами (5), (6)) вероятности  $P_{s-, x}$ ,  $P^{u+, x}$ , определенные формулами (7), (8), обладают следующими свойствами: для любых ограниченных  $\xi \in \mathcal{F}_{<t}$ ,  $\eta \in \mathcal{F}_{>t}$  функция  $P^{u+, x} \xi$  непрерывна справа по  $u$  на  $[t, \beta)$  п.н.  $P$ , а функция  $P_{s-, x} \eta$  непрерывна слева по  $s$  на  $(\alpha, t]$  п.н.  $P$ .

7. Будем говорить, что двухстороннее представление  $(x_t, P_{t, x}, P^{t, x})$  регулярно (вполне регулярно), если регулярны (вполне регулярны) оба представления  $(x_t, P_{t, x})$  и  $(x_t, P^{t, x})$ . Функцию  $p(s, x; t, y)$  назовем фундаментальной плотностью  $(x_t, P_{t, x}, P^{t, x})$ , если выполняются соотношения (1)–(4).

Теорема 4. Если стохастическая система  $\mathcal{F}(J)$  имеет хотя бы одно абсолютно непрерывное марковское представление, то у нее есть вполне регулярное двухстороннее марковское представление  $(z_t, P_{t, z}, P^{t, z})$ , обладающее фундаментальной плотностью и разделяющее состояния. Его можно построить из представлений, описанных в п. 6 по формулам:  $z_t = x_{t-} \times x_{t+}$ ,  $P_{t, x \times y} = P_{t+, y}$ ,  $P^{t, x \times y} = P^{t-, x}$ ,  $\alpha < t < \beta$ , причем фундаментальная плотность определяется формулой

$$p(s, x \times y; t, x' \times y') = P p(s+, y; q+, x_{q+}) p(r-, x_{r-}; t-, x'),$$

где  $q < r$  — любые точки интервала  $(s, t)$ . Все разделяющие состояния регулярные двухсторонние марковские представления стохастической системы  $\mathcal{F}(J)$  эквивалентны.

Мы предлагаем называть представление  $(z_t, P_{t, z}, P^{t, z})$  первым (или вертикальным) центральным представлением стохастической системы  $\mathcal{F}(J)$ .

8. Второе (горизонтальное) центральное представление требует расщепления времени. Сопоставим две точки  $t-$  и  $t+$  каждой точке  $t \in T = (\alpha, \beta)$  и по одной точке  $\alpha+$  и  $\beta-$  концам  $\alpha$  и  $\beta$ . Упо-

рядочим множество  $V$  всех этих точек, полагая  $t- < t+$  и  $s\pm < t\pm$  при  $s < t$ . Точки  $t-$  и  $t+$  будем называть соседними. Будем обозначать через  $(v_1, v_2)$  множество точек  $v \in V$ , удовлетворяющих неравенствам  $v_1 < v < v_2$ . Аналогично определяются  $[v_1, v_2]$  и  $(v_1, v_2]$ .

Зададим отображение  $v \rightarrow \hat{v}$  множества  $V$  на  $[\alpha, \beta]$ , полагая  $v = t$  при  $v = t\pm$ . Пусть  $\mathcal{F}(J)$  — стохастическая система на интервале  $T = (\alpha, \beta)$ . Сопоставим каждой паре  $u < v \in V$   $\sigma$ -алгебру  $\hat{\mathcal{F}}(u, v)$  по следующему правилу: если  $u, v$  — не соседи, то  $\hat{\mathcal{F}}(u, v) = \mathcal{F}(\hat{u}, \hat{v})$ ; если  $u, v$  — соседи, то  $\hat{\mathcal{F}}(u, v)$  состоит из пустого множества и множества  $\Omega$ . Набор  $\hat{\mathcal{F}}(u, v)$  удовлетворяет условиям А)–В) из п. 2 и его естественно назвать стохастической системой с параметрическим множеством  $V$ . Определения марковских представлений остаются без изменений, если параметрическим множеством является не  $T$ , а  $V$  (или любое другое упорядоченное множество). Сохраняется и определение фундаментальной плотности  $p(u, x; v, y)$  с одной оговоркой: эта плотность должна быть определена только для соседних  $u, v$ .

Введем в  $V$  топологию, считая окрестностями точки  $t+$  интервалы  $[t+, u)$ , где  $u > t+$ , а окрестностями точки  $t-$  интервалы  $(u, t-]$ , где  $u < t-$ . Будем говорить, что двухстороннее представление  $(x_v, P_v, x, P^{v, x})$  регулярно, если при любом  $u \in V$  и любых ограниченных  $\xi \in \mathcal{F}_{<u}$ ,  $\eta \in \hat{\mathcal{F}}_{>u}$  функция  $P_{v, x, \eta}$  непрерывна по  $v$  на  $[\alpha+, u]$  п.н.  $P$ , а функция  $P^{v, x, \eta}$  непрерывна по  $v$  на  $[u, \beta-]$  п.н.  $P$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\mathcal{F}(J)$  — стохастическая система на интервале  $T$  и  $\hat{\mathcal{F}}(u, v)$  — соответствующая стохастическая система с параметрическим множеством  $V$ . Если  $\mathcal{F}(J)$  обладает хотя бы одним абсолютно непрерывным марковским представлением, то  $\hat{\mathcal{F}}(u, v)$  обладает регулярным двухсторонним марковским представлением  $(x_v, P_v, x, P^{v, x})$ , имеющим фундаментальную плотность, разделяющим состояниями и таким, что для  $P$ -почти всех  $\omega$  не более чем счетно множество  $\{t: P_{t-, x_{t-}} \neq P_{t-, x_t} \text{ или } P^{t-, x_{t-}} \neq P^{t-, x_t}\}$ .

Представление  $(x_v, P_v, x, P^{v, x})$  можно построить, соединяя описанные в теореме 3 представления  $(x_{t-}, P_{t-, x}, P^{t-, x})$  и  $(x_{t+}, P_{t+, x}, P^{t+, x})$ . Фундаментальная плотность  $p(u, x; v, y)$  получается, если рассмотреть функции  $p(s+, x; t+, y)$  и  $p(s-, x; t-, y)$  из теоремы 3 и положить

$$\begin{aligned} p(s+, x; t-, y) &= Pp(s+, x; q+, x_{q+})p(r-, x_{r-}; t-, y), \\ p(s-, x; t+, y) &= Pp(s-, x; q-, x_{q-})p(r+, x_{r+}; t+, y), \end{aligned}$$

где  $q < r$  — произвольные числа из интервала  $(s, t)$ . Этому представлению эквивалентны все регулярные двухсторонние марковские представления, разделяющие состояния.

Центральный экономико-математический институт  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
11 II 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Е. Б. Дынкин, С. Е. Кузнецов, ДАН, т. 214, № 1 (1974). <sup>2</sup> Е. Б. Дынкин, ДАН, т. 214, № 6, (1974). <sup>3</sup> Е. Б. Дынкин, УМН, т. 28, № 2 (1973).