Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 5

УДК 519.21:621.391.175

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

П. И. КУЗНЕЦОВ, Л. А. ПЧЕЛИНЦЕВ, А. В. СТЕПАНОВ

ДИАГНОСТИКА КАК УПРАВЛЯЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 1 IV 1974)

В настоящее время в технике, медицине и других областях народного хозяйства накопилось большое число частных диагностических задач. Как правило, для решения каждой задачи разрабатывается свой алгоритм и своя диагностическая система, причем зачастую используются допусковые алгоритмы, которые далеко не всегда оптимальны. Наличие такого разнообразия алгоритмов и систем затрудняет их стандартизацию и унификацию, что в итоге не позволяет повысить их качество. Поэтому назрела необходимость построения стройной общей теории диагностических процессов. Ниже предлагается указанная теория, основанная на рассмотрении диагностического процесса как управляемого случайного процесса. Такой подход позволяет ввести единую терминологию и классификацию почти всех диагностических процессов, встречающихся в технике, медицине, геофизике и т. д. Наряду с этим унифицируются алгоритмы определения оптимальной стратегии диагностики δ, которая распадается на три взаимосвязанных стратегии: $\delta=(f, \tau, \varphi)$, где f — стратегия управления ходом диагностического процесса, τ — стратегия остановки процесса, φ — стратегия принятия окончательного решения.

Пусть $(\Theta, \mathcal{T})$ — измеримое пространство возможных состояний объекта диагностики, A — пространство проверок объекта, $(E_a, \mathcal{B}_a)$ — измеримое пространство значений результатов проверки $a\in A$. Обозначим через $D=(D_n(h_n))$ последовательность множеств проверок, допустимых на n-м шаге, $D_n(h_n)\subseteq A$, при условии, что получена история

$$h_n=(x_1,\ a_1,\ x_2,\ a_2, \ldots,\ a_{n-1},\ x_n)\in H_n,$$

где $x_i\in E_{a_{i-1}}$, $i=2, 3, \ldots, n$; $a_j\in D_j(h_j)$, $j=1, 2, \ldots, n-1$; $n=1, 2, \ldots$

Значение x_1 определяется некоторой исходной информацией, с которой начинается диагностический процесс. Оно определяется в общем случае результатом предварительной проверки $\bar{a}$, которая может и не входить в состав A, но результат которой сообщается диагностической системе (д.с.) извне. (Если такой проверки нет, то x_1 может быть положено равным 0.) Пусть в общем случае p_0 — вероятность на $\mathcal{B}_{\bar{a}}$, определяющая значение $x_1\in E_{\bar{a}}$. Введем переходную вероятность $p_n(h_n, a, x)$, которая определяет вероятность $\mathcal{B}_a$ при n-й по счету (от начала диагностики) проверке a и при условии, что до ее проведения была получена история h_n, $n=1, 2, \ldots$ Зададим функцию потерь $r_n(h_n, a)$ от проверки a на n-м шаге при истории h_n, $r_n\in R^+=(0, \infty)$ $\forall n$. Пусть $g_n=g_n(h_n, \varphi)$ — функция потерь от ошибочного окончательного решения, которое д.с., накопив историю h_n, принимает по стратегии φ: $H_n\to Z$, где Z — множество конечных решений. Стратегию f продолжения или управления ходом диагностического процесса введем как

$$f=(f_n),\ n=1, 2, \ldots;\quad f_n\colon H_n\to D_n(h_n).$$

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P_f)$ — основное вероятностное пространство, где $\omega = (x_1, x_2, \ldots)$, а P_f вычисляется по (p_n), $n=0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, Ω есть набор всевозможных траекторий диагностического процесса.

Определим неубывающую последовательность σ-алгебр $(\mathscr{F}_n)$, таких, что $F_n \subseteq F$, $F_n \subseteq F_{n'}$, $n \leqslant n'$, и относительно нее определим класс $\mathfrak{M}$ конечных марковских моментов остановки $\tau \in \mathfrak{M}$. Считаем, что диагностический процесс согласован с $(\mathscr{F}_n)$. Стратегией диагностики назовем набор $\delta = (f, \tau, \varphi)$. Ценой диагностики назовем

$$v = \inf_{\delta} M\left[\sum_{n=1}^{\tau} r_n + g_\tau(h_\tau, \varphi)\right],$$

где математическое ожидание берется по P_f. Стратегию $\delta^* = (f^*, \tau^*, \varphi^*)$, которая обеспечивает инфимум, назовем оптимальной. Таким образом диагностический процесс определяется набором $(\Theta, A, E, D, p_0, (r_n), (g_n), Z, \delta)$, где $E = (E_a)$, $a \in A$, $n=1, 2, \ldots$ Требуется указать алгоритм определения δ^*.

Чтобы сделать схему решения практически осуществимой на реальных д.с., введем следующие ограничения: мощность $|A| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$, $g_n < \infty$, $|Z| < \infty$. Эти ограничения всегда выполняются на практике. Это дает возможность опустить доказательство существования конечной цены диагностики. Пусть $v_n(h_n)$ — условная цена или h_n-цена диагностики (математическое ожидание оптимальных остаточных суммарных потерь при условии, что они подсчитываются с n-го шага включительно при наличии истории h_n). Введем оператор

$$T_n v_n(h_n) = \inf_{a \in D_n(h_n)} [r_n(h_n, a) + M_{p_{n+1}} v_{n+1}(h_{n+1})].$$

где M_{p_n} — математическое ожидание по $p_n(h_n, a, x)$.

Обозначим

$$g_n(h_n) = \inf_{\varphi} g_n(h_n, \varphi).$$

Тогда

$$v_n(h_n) = \min[g_n(h_n), T_n v_n(h_n)], \quad n=1, 2, \ldots.$$

$$v = M_{p_0} v_1(x_1).$$

Используя ([1], [2]), можно показать, что:

1) φ^* соответствует байесовской стратегии относительно апостериорной вероятности на σ-алгебре $\mathscr{F}$ объекта, определяемой по h_τ;

2) $\tau^* = \inf\{n: g_n(h_n) = T_n v_n(h_n)\}$;

3) f^* обеспечивает выбор следующей проверки согласно T_n. Цена диагностики может быть при этом определена из следующих соотношений:

$$v_n(h) = \lim_{k\to\infty} Q_n^k g_n(h_n), \quad n=1, 2, \ldots;$$

$$Q_n^0 g_n(h_n) = g_n(h_n),$$

$$Q_n^1 g_n(h_n) = \min[g_n(h_n), T_n g_n(h_n)],$$

$$Q_n^k g_n(h_n) = \min[g_n(h_n), T_n Q_n^{k-1} g_n(h_n)];$$

$$v_1(x_1) = \lim_{k\to\infty} Q_1^k g_1(x_1), \quad v = M_{p_0} v_1(x_1).$$

Эти соотношения нужно использовать для определения v и δ^* на этапе разработки алгоритмического и программного обеспечения для д.с.

Практика решения диагностических задач говорит, что зачастую пространство A может быть укрупнено путем объединения в одну проверку нескольких зависимых (в смысле теории вероятностей) проверок. Тогда A распадается на непересекающиеся подмножества, каждое из которых трактуется как одна сложная, многомерная проверка. Иногда же просто всё A состоит из независимых проверок. В обоих случаях появляется возможность вместо использования h_n перейти к апостериорной вероятности на σ-алгебре объекта как к достаточной статистике. Наибольший практический интерес представляет случай диагностики с глубиной $\gamma=|\Theta|=$ $=|Z|<\infty$. Тогда апостериорная вероятность $s_n\in S$, где S — это грань γ-мерного единичного симплекса. При этом обычно допустимы следующие упрощения:

$$p_n(h_n, a, s')=p(s, a, s'); \quad r_n(h_n, a)=r(s, a);$$

$$g_n(h_n)=g(s); \quad D_n(h_n)=D(s).$$

При этих предположениях диагностическому процессу соответствует марковская стационарная цепь на состояниях из S и набор $[\gamma, S, A, D, p_0, r, g, \gamma, \delta)$. В этом случае p_0 будет определять начальное состояние s_1 (ср. раньше было x_1). Имеет место очевидное перенесение общих соотношений:

$$v(s)=\min[g(s), Tv(s)]; \quad v=M_{p_0}v(s); \quad v(s)=\lim_{k\to\infty}Q^kg(s);$$

$$Q^0g(s)=g(s), \quad Q^1g(s)=\min[g(s), Tg(s)];$$

$$Q^kg(s)=\min[g(s), TQ^{k-1}g(s)];$$

$$Tg(s)=\min_a[r(s, a)+M_pg(s')];$$

$$\tau^*=\inf[n: g(s)=Tv(s)],$$

где M_p — математическое ожидание по $p(s, a, s')$. Если необходимо учесть случайную длительность ξ отдельной проверки, то $r=r(s, a, s', \xi)$. Положим, что $q(\xi|s, a, s')$ — функция распределения вероятностей для ξ. Тогда переход к $r(s, a)=M_pM_qr(s, a, s', \xi)$ позволяет учесть полумарковский характер диагностического процесса.

Второй Московский государственный
медицинский институт
им. Н. И. Пирогова

Поступило
15 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Ширяев*, Статистический последовательный анализ, оптимальные правила остановки, «Наука», М., 1969. [2] *K. Hinderer*, Foundations of Non-Stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 33, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1970.