

**РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН
И ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

¹Можаровский В.В., ¹Кузьменков Д.С., ¹Коляскин И.И.,

²Василевич Ю.В., ¹Москалева М.В.

¹ УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. На современном этапе исследований необходимо сосредоточиться в направлении расчета элементов деталей машин с покрытиями из композита, считая, что зона контакта дискретная и давление в модели «шина–дорожное покрытие» будет дискретным, а напряженное состояние покрытия будет изменяться в зависимости от толщины покрытия, свойств материалов, анизотропии и т.д. Необходимо разработать численно-аналитическую модель, с помощью которой можно определять напряженно-деформированное состояние как в дорожном покрытии и основании, но и в контактирующей шине колеса.

Для построения теоретических зависимостей и алгоритмов расчета необходимо рассматривать контактное взаимодействие цилиндрического тела (моделирующее шину) и слоистого основания (моделирующего дорожное покрытие), анализировать и сравнивать механизм трения, качения и скольжения по идеализированным элементам текстуры материала поверхности, учесть основные, геометрические и физические параметры материала дорожного покрытия. Так, имеется большой опыт решения задач подобного класса [1–12]. В монографии [5] приведены результаты расчета НДС слоистых систем из композиционных материалов. Получены аналитические решения плоских граничных задач для изотропной и ортотропной однородной полосы. Наличие большого опыта в проведении научных работ в данной области свидетельствует предлагаемый список публикации за последние годы [7–12].

Настоящая работа продолжает перечень начатых работ в области фундаментальных и прикладных исследований в направлении создания новых армированных материалов на основе современных полимеров и резин, работающих в сложных эксплуатационных условиях, в основном, касаясь применительно к движению автомобильных шин [7-13].

В данном случае, представлена методика дальнейшего расчета контактного взаимодействия армированных материалов с учетом явления дискретности контакта для резины, армированной кордом.

Актуальность исследуемой проблемы в научном и техническом мире очевидна. Ежегодно десятки статей и книг, а также диссертаций посвящены вопросам по этой проблеме. Так, например, в работе [8] представлен расчет полосы с дискретным контактом на основе МКЭ. Нами были проведены экспериментальные исследования контактного взаимодействия шины колеса [9] (см. рисунок 1), получены размеры зоны контакта «шина колеса – плоское основание» и деформативности шины (в ИММС НАН Беларуси). Как видно из рисунка отпечатка, область контакта является дискретной и давление в зоне контакта распределено неравномерно, что подтверждается численными расчетами, проведенными в работе [8, 9] и представленного на рисунке 1.

Поэтому возникла необходимость построения алгоритма численной реализации контактного взаимодействия с учетом различных факторов.

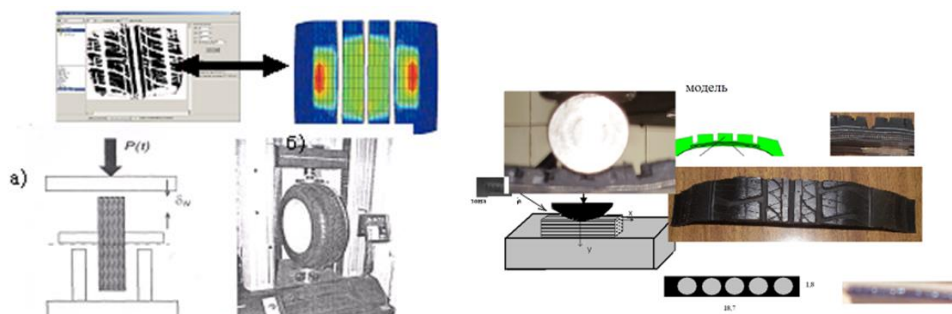


Рисунок 1. - Схемы и образцы испытаний, экспериментальные результаты, реализация численного исследования

Постановка задачи: рассмотрим процесс математического моделирования контактного взаимодействия цилиндрической модели шины колеса с основанием, которое имеет ортотропные упругие характеристики. Необходимо построить математическую модель для нахождения величины зоны контакта колеса, давление, и определить какие возникают напряжения в основании колеса, а также найти давление в зоне дискретизации и напряжение в каждом элементе и по всей зоне контакта (см. рисунок 2).



Рисунок 2. - Дискретная численно-аналитическая модель расчета контакта шины колеса

1. Математическая модель расчета НДС ортотропной полосы. Основные зависимости расчета. Рассмотрим задачу о контакте ортотропной полосы с упругой полуплоскостью. Необходимо определить напряженно-деформированное состояние как в ортотропной полосе, так и в упругой полуплоскости. В дальнейшем индекс “I” будет относиться к полосе, а индекс “II” к упругой полуплоскости. Для создания алгоритма расчета используем подход, представленный в работе [5], где выведены основные теоретические зависимости определения напряжений и перемещений, как в полосе, так и в основании.

Примем физические соотношения для плоского ортотропного композита в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций. S_{ij}, E, ν , $(i, j=1,2)$ – технические постоянные материала ([5]). Решение ищем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_I} &= -\int_0^{\infty} [A \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + B \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y) + N \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + K \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y)] \cos \alpha x d\alpha \\ \sigma_{x_I} &= \int_0^{\infty} [A \gamma_1^2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + B \gamma_2^2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y) + N \gamma_1^2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + K \gamma_2^2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y)] \cos \alpha x d\alpha \\ \tau_{xy_I} &= \int_0^{\infty} [A \gamma_1 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + B \gamma_2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y) + N \gamma_1 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + K \gamma_2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y)] \sin \alpha x d\alpha \\ v_I &= \int_0^{\infty} [A Q_1 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + B Q_2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y) + N Q_1 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + K Q_2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y)] \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha + d; \\ u_I &= \int_0^{\infty} [A R_1 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_1 y) + B R_2 \operatorname{ch}(\alpha \gamma_2 y) + N R_1 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_1 y) + K R_2 \operatorname{sh}(\alpha \gamma_2 y)] \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha + d; \end{aligned} \quad (1)$$

где $Q = S_{12} \gamma_i - \frac{S_{22}}{\gamma_i}$; $R_i = S_{11} \gamma_i^2 - S_{12}$; $i=1,2$; d – произвольная константа.

Соответственно, определяем компоненты напряжений и перемещений для основания

$$\begin{aligned} \sigma_{y_{II}} &= -\int_0^{\infty} (C + D_{\alpha y}) e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha; \\ \sigma_{x_{II}} &= \int_0^{\infty} [C + D(\alpha y - 2)] e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha; \\ \tau_{xy} &= -\int_0^{\infty} [C + D(\alpha y - 1)] e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha; \\ v_{II} &= \int_0^{\infty} [C \delta + D(\alpha y \delta + \delta - \nu \rho)] e^{-\alpha y} \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha + d; \\ u_{II} &= \int_0^{\infty} [C \delta + D(\alpha y \delta - \rho)] e^{-\alpha y} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha + d, \end{aligned} \quad (2)$$

где при плоской деформации: $\delta = \frac{1+\nu}{E}$; $\rho = \frac{2(1-\nu^2)}{E}$; при плоском напряженном состоянии: $\delta = \frac{1+\nu}{E}$; $\rho = \frac{2}{E}$. Входящие в уравнение коэффициенты при плоской деформации равны:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}; S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2};$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии: $\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0, j = \overline{1,2}$;

$$E_x = E_1, E_y = E_2; \nu_{xy} = \nu_{12};$$

Здесь $E_j, j = \overline{1,2}; G_{12}, \nu$ – технические постоянные материала.

Примем граничные условия на верхней границе полосы, давление на элементе

$$\sigma_{y_I}(y=0) = \begin{cases} p(x), & -a \leq x \leq a; \\ 0, & a < |x|; \end{cases} \quad \tau_{xy}(y=0) = 0. \quad (3)$$

Граничные условия на нижней границе $y = h$:

$$\sigma_{y_I}(y=h) = \sigma_{y_{II}}(y=h); \frac{\partial u_I(y=h)}{\partial x} = \frac{\partial u_{II}(y=h)}{\partial x};$$

$$\tau_{xy_I}(y=h) = \tau_{xy_{II}}(y=h); \frac{\partial v_I(y=h)}{\partial x} = \frac{\partial v_{II}(y=h)}{\partial x}; \quad (4)$$

Согласно [5] из граничных условий получаем систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными коэффициентами A, B, N, K, C, D , где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y$ – компоненты тензора напряжений и деформаций для полосы и основания, h – ширина полосы.

Определение напряжений и перемещений в ортотропной полосе на жестком основании. Соответственно рассматривается случай, когда нагрузка распределяется неравномерно по все ширине ортотропной полосы (см. рисунок 2). Это часто встречается на практике, например, при контакте шины с дорожным покрытием.

Данную задачу можно свести к случаю, рассмотренному ранее, если решить задачу для нагрузки с противоположным знаком на отрезках, а потом результаты просуммировать с результатами, полученными при сплошной нагрузке.

2. Алгоритм решения задачи и программная реализация. Разработан алгоритм, реализующий расчет напряжений и перемещений в ортотропной полосе при её контакте с упругой полуплоскостью. Его краткое описание приведено ниже.

1) Вводим исходные данные: a, h, p и физико-технические постоянные материалов.

2) Для определения напряжений и перемещений в ортотропной полосе необходимо найти неизвестные коэффициенты A, B, N, K, C, D . Она определяются как решения системы из граничных условий (см.[5]).

3) Далее напряжения и перемещения в ортотропной полосе определяются по формулам (1), (2). В данном случае будем использовать численное интегрирование по формуле Симпсона.

4) При использовании тонких композиционных покрытий важно знать напряжения, возникающие на границе раздела покрытие-основание. В этом случае напряжения перемещения определяются также, будем использовать численное интегрирование по формуле Симпсона.

5) Для определения полной картины напряжений и перемещений во всей ортотропной полосе шагаи 1)–4) прodelываем для каждого x , $-a \leq x \leq a$ для кожного элемента длиной a и для каждого y , $0 \leq y \leq h$.

6) Строим графики распределения напряжений на границе раздела покрытие-основание и внутри ортотропаной полосы.

Разработаны программы расчета контактного взаимодействия для полосы (дискретной) и ее основания, при этом строится такой алгоритм, который учитывал свойства волокнистого композита (анизотропию) как для основания, так и для полосы.

Разработан алгоритм и создана программа (см. рисунок 3), реализующая определение напряжений и перемещений в ортотропной полосе на жестком основании.

Программа по вышеописанному алгоритму определяет напряжения и перемещения, появляется новое окно, в котором можно выбрать вид результата и конкретную точку по x или по y для вывода. При выборе результата по одной переменной, при выборе фиксированной точки по x или y , при выборе конкретной функции появляются результаты расчётов в виде таблицы и в графическом виде (рисунок 4).

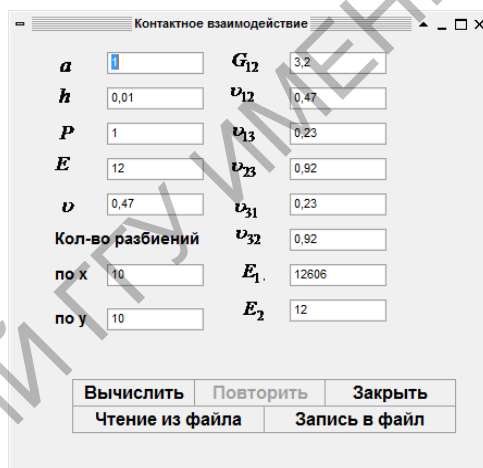


Рисунок 3. – Главное окно программы, реализующей определение напряжений

При выборе результата по переменным x , y появляются результаты расчётов в виде таблицы для конкретного выбранного напряжения или перемещения.

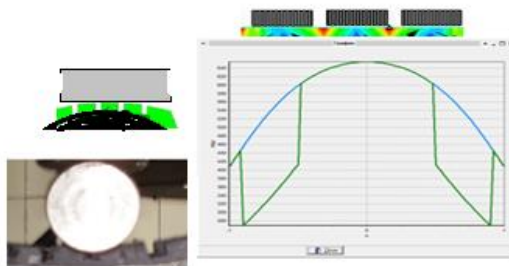


Рисунок 4. - Расчет напряжений при дискретном контакте. Графики зависимости σ_y от x при $y = 3$

3. Реализация численного расчета напряженно-деформированного состояния в упругом теле под воздействием шины колеса. Перспективы прогресса в машиностроении и строительстве в основном связываются с разработкой и широким применением композиционных материалов (композитов).

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта с массивными шинами (автомобильные, электропогрузчики, подвесные канатные дороги, эскалаторы метро и др.), а также новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии на напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия при силовом квазистатическом воздействии не позволяет обосновать практику их проектирования; не существует сравнимых по эффективности методов расчета поведения конструкций из композитов при контакте по ним внешними объектами. В связи с этим есть необходимость в разработке математической модели и компьютерных программ расчета напряжений при статическом контакте штампа (моделирующего шину колеса) с телом (или покрытием) из композита при различных физических параметрах взаимодействия.

В данном случае особенно важно исследовать механические свойства армированных материалов, работающих в процессе статического контактного взаимодействия цилиндрического тела (моделирующего шину) и слоистого основания и зависимость напряженного состояния упругих тел из композитов (при статическом контакте) от типа ориентации волокон материала, например, армированного кордом.

Анализ применения анизотропных композиционных материалов нельзя производить без учета их взаимодействия с другими телами сопряжения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры, и расположению компонентов, а сути важно учитывать также и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей.

В связи с этим возникает цель исследований – создание математических моделей и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем при силовом статическом воздействии. Создать методику, реализующую определение напряжений и перемещений в объемном теле при заданных областях контакта и действующего давления.

На основании работ [1, 8, 9] представлен алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле, заданной формы [14]. Как и ранее для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Применялись прямоугольные конечные элементы. Данная программа позволяет находить напряженно-деформированное состояние в упругом теле при изменяющейся зоне контакта и действующем давлении во времени. Метод основан на считывании цвета в зоне контакта (каждому давлению в точке соответствует свой цвет). Например, экспериментально полученные результаты можно обработать и получить картину изменения НДС.

Ведется работа по распознаванию цветов загруженного из файла изображения. Т.е. загружаем изображение, его разбиваем на КЭ и определяем средний цвет в КЭ и соотносим его к одному из выбранных в программе цветов, которому соответствует определенное значение нагрузки.

Разработанный программный пакет расчета позволяет строить объемные графики напряжений и перемещений, как на поверхности основания (см. рисунки 5, 6), так и внутри его, а также изменения компонент напряжений или перемещений с течением времени.

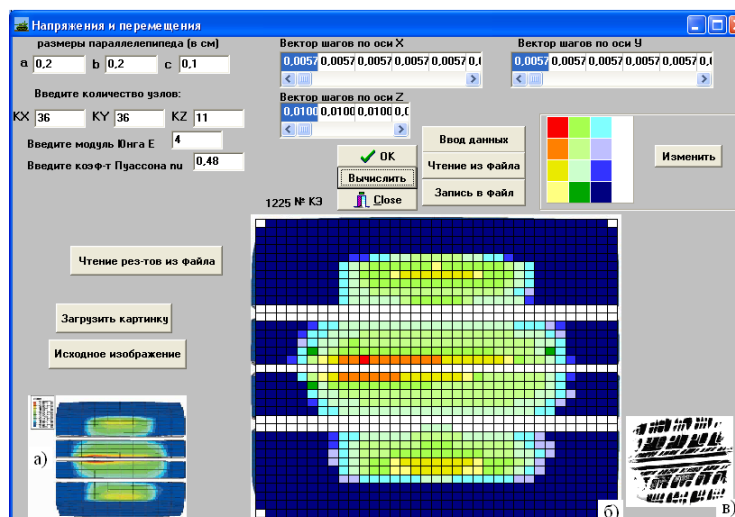


Рисунок 5. - Схема расчета при действии нагрузки (шины колеса) на основание:
 а)-численный расчет [8, 11].; б)- программная реализация;
 в)-эксперимент в черно-белом свете [9]

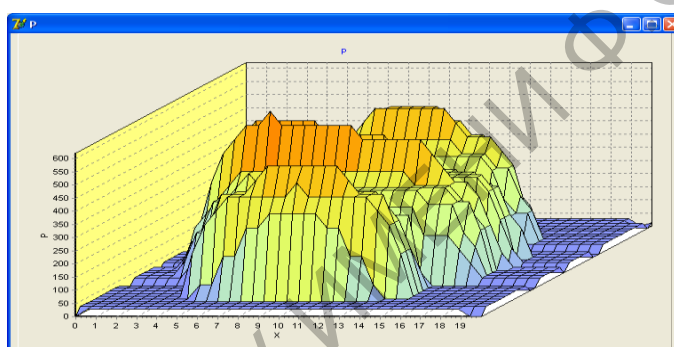


Рисунок 6. - Качественная картина, показывающая расчет изменения давления на верхней границе при контакте шины колеса

В перспективе исследования будут касаться построения методик определения напряженного и деформированного состояния покрытий дорог, механические свойства которых изменяются по глубине.

Проведено численное исследование напряженно-деформированного состояния слоистой системы, на поверхности которой расположена лунка радиуса r , при действии распределенной нормальной нагрузки (см. рисунок 4). На основании предложенного алгоритма строится программа о деформативности элементов деталей машин из композитов на примере расчета зубьев зубчатых колес, а также разработано приложение для расчета напряжений и перемещений в объемном теле заданной формы при действующем давлении и заданных областях контакта «массивная шина–дорожное покрытие».

Выводы. Приведенные в этой статье подход и результаты показали, возможность определения напряженно-деформированное состояние для слоистых тел применительно к дискретному контакту, что дает возможность инженерного расчета взаимодействия «шина–дорожное покрытие».

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргатов, И.И. Основы теории упругого дискретного контакта / И.И. Аргатов, Н.Н. Дмитриев. – СПб.: Политехника, 2003. – 233 с.
2. Аргатов, И.И. Асимптотические модели упругого контакта / И.И. Аргатов. – СПб.: Наука, 2005. – 448 с.
3. Willis, J.R. Hertzian contact of anisotropic bodies / J.R. Willis // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. – 1966. – Vol. 14. – P. 163–176.
4. Свекло, В.А. Действие штампа на упругое полупространство / В.А. Свекло // *Прикладная математика и механика*. – 1970. – Т. 34, вып. 1. – С. 72–178.
5. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука, 1988. – 280 с.
6. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский [и др.] // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.
7. Argatov, I.I., Sabina, F.J., 2014. Small-scale indentation of an elastic coated half-space: influence of poisson's ratios on the substrate effect. *Int. J. Eng. Sci.* 8. – P. 33–40.
8. Рыжов, С.А. Проектирование шин с использованием программного комплекса АВАQUS / С.А. Рыжов, К.А. Ильин, А.Н. Варюхин // *САПР и графика*. – 2006. – №1. – С. 20–40.
9. Можаровский, В.В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский [и др.] // *Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов*. – Минск, 2007 год. – С. 135–142.
10. Можаровский, В.В. О контактном взаимодействии жесткого индентора с армированным резиновым слоем с учетом явлений вязкоупругости / В.В. Можаровский // *Полимерные материалы и технологии*. – 2017. – №2. – С. 70–79.
11. Можаровский, В.В. Реализация численного расчета напряженно-деформированного состояния в упругом теле под воздействием шины колеса / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // *Проблемы безопасности на транспорте: матер. VIII-ой междунар. научно-практ. конф., 23 – 24 ноября 2017 г. . . : в 2 ч. Ч. 2 Бел. гос. ун-т транспорта; под общ. ред.: Ю.И. Кулаженко*. – Гомель, 2017. – С. 200.
12. Можаровский, В.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния массивных шин из армированных материалов / В.В. Можаровский // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2008. – №3. – С. 14–21.
13. Можаровский, В.В. Исследование напряженного состояния волокнистого композиционного материала с однородным покрытием при контакте с цилиндрическим индентором / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачёва // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2000. – № 2. – С. 5–10.
14. Коляскин, И.И. Расчет напряженно-деформированного состояния упругого тела при действующем давлении и заданных областях контакта / И.И. Коляскин // *Сборник «Творчество молодых» Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*. – Гомель, 2018. -ч.1 –С.93-94.