Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 5

УДК 519.3:62-50 МАТЕМАТИКА

М. С. НИКОЛЬСКИЙ

О ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УБЕГАНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 12 IV 1974)

В работах Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко ([1-3]) были заложены основы теории линейных дифференциальных игр убегания. Достаточные условия убегания, указанные в работе ([3]), являются более общими, нежели в работах ([1, 2]). Следует, однако, отметить, что принципы убегания, которые используются в ([1]), отличны от принципов убегания, используемых в ([2, 3]).

В работе ([4]), следуя принципам убегания работы ([3]), получены некоторые новые условия убегания, отличающиеся от условий убегания из ([2, 3]). В ([4]) использовалось, в частности, операторное исчисление Я. Микусинского (см. ([5])), которое впервые стал использовать в теории убегания (в нелинейных задачах) Р. В. Гамкрелидзе. В связи с результатами работ ([3, 4]) интересной кажется попытка получения условий убегания, которые естественным образом объединяют их условия убегания. Именно этому вопросу и посвящена настоящая статья. В ней в качестве основных моментов используются принципы убегания из ([3]). Их кратко, не прибегая к точным понятиям, можно сформулировать следующим образом.

Принципы убегания. Убегание ведется малыми отрезками продолжительности $\theta>0$. На каждом отрезке $[0, \theta]$ убегающий тратит свое управление на компенсацию действий догоняющего с точностью до некоторых величин и на маневр обхода, так что на каждом из отрезков $z(t)\notin M$, если $z(0)\notin M$, где M — терминальное подпространство.

Замечание. В работе ([1]) величина θ зависит от $z(0)$.

Возможны и другие принципы убегания (см., например, ([6])). Но в настоящее время наиболее эффективными являются принципы убегания из ([3]).

В эвклидовом n-мерном пространстве R^n рассматривается движение вектора z, описываемое уравнением

$$\dot{z}=Cz-u+v+a, \tag{1}$$

где $u\in P$, $v\in Q$ — управляющие векторы, a — постоянный вектор из R^n. Вектором $u(t)$ распоряжается догоняющий, вектором $v(t)$ распоряжается убегающий. P и Q — выпуклые компакты из R^n. В R^n задано терминальное линейное подпространство M размерности $\leqslant n-2$. Относительно постановки задачи убегания см. ([3, 4]).

В этой статье мы дадим достаточные условия того, чтобы из любого начального состояния $z_0\notin M$ убегающий, используя свою информацию, мог при $t\geqslant 0$ обеспечить соотношение $z(t)\notin M$, т. е. убегание на всей полуоси $[0, +\infty)$. В процессе рассуждений мы используем идеи и результаты работы ([3]).

Обозначим через L ортогональное дополнение M до R^n, через W — некоторое двумерное подпространство из L, через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на W.

Для маневра обхода решающую роль играет следующее

Условие а) (см. ([3])). В W не существует фиксированного одномерного подпространства W^1, для которого имеет место включение $\pi e^{rC}Q\dot{\subset}W^1$ при всех малых положительных $r>0$.

Не ограничивая общности, можно считать (изменяя, если надо a в (1)), что $0 \in \operatorname{Int} Q$ в несущем подпространстве V размерности β; очевидно $\beta \geqslant 1$. Обозначим через F $(\beta \times n)$-матрицу, осуществляющую гомеоморфное отображение R^β на V. Рассмотрим аналитическую матрицу $F(r) = \pi e^{rC} F$. Она допускает однозначное разложение в виде степенного ряда

$$\pi e^{rC} F = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \frac{r^i}{i!},$$

где F_i — постоянные $(\beta \times n)$-матрицы.

Если выполнено условие а), то возможны лишь следующие случаи.

I случай. Существует такое целое число $k \geqslant 0$, что $F_i = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$, а ранг $F_k = 2$.

II случай. Существует такое целое число $k \geqslant 0$, что $F_i = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$, а ранг $F_k = 1$.

I случай для анализа оказывается более простым. Условия убегания работ [3, 4] здесь эквивалентны требованию выполнения включения

$$\mu \pi C^k P \overset{*}{\subset} \pi C^k Q \tag{2}$$

при некоторой константе $\mu > 1$.

II случай для анализа сложнее.

Во II случае для $F(r)$ существуют (это обосновывается методами работы [3]) такие постоянные невырожденные квадратные матрицы G, H порядков n, β соответственно, что все строки матрицы $\Lambda(r) = GF(r)H$, кроме верхних двух, нулевые, и $\Lambda(r)$ при малых r имеет вид

$$\Lambda(r) = \left(\begin{array}{cc} r^k + O(r^{k+1}), & O(r^{k+1}), \dots, O(r^{k+1}) \\ r^l + O(r^{l+1}), & O(r^l), \dots, O(r^l) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array} \right),$$

где $k < l < +\infty$. Матрицу $\Lambda(r)$ назовем каноническим представлением матрицы $F(r)$.

Матрицы $\Lambda(r)$, G, H, вообще говоря, неединственны, но целое число l определяется матрицей $F(r)$ единственным образом. Числа k, l характеризуют возможности убегающего при маневре обхода. Представим управление $v(t)$ в виде $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, где $v_1(t)$, $v_2(t)$ — измеримые функции, удовлетворяющие включениям $v_1(t) \in (1-\nu) Q$, $v_2(t) \in \nu Q$, где константа $\nu \in (0, 1)$ и близка к 1. Нетрудно видеть, основываясь на результатах § 3 из [3], что при маневре обхода «малое» управление убегающего $v_1(t)$ способно «подавить» на временном отрезке малой протяженности невязки вида $G^{-1} \int_0^t L(t-s) w(s)\, ds$ (если $w(s)$ известна убегающему при $0 \leqslant s \leqslant t$), где $L(r)$ — блочная $(2 \times n)$-матрица:

$$L(r) = \begin{pmatrix} M(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M(r) = \begin{pmatrix} \dfrac{r^{k+1}}{(k+1)!}, & 0 \\ 0, & \dfrac{r^{l+1}}{(l+1)!} \end{pmatrix},$$

$M(r)$ — матрица порядка 2, $w(s)$ — произвольная измеримая 2-мерная функция, удовлетворяющая неравенству $|w(s)| \leqslant N$, N — любая, сколь угодно большая, фиксированная положительная константа. Этот факт дает нам естественное определение «точности», с которой «большое» управление убегающего $v_2(t) \in \nu Q$ должно иметь возможность компенсировать действия догоняющего. Эта «точность» определяется функциями вида $G^{-1}\int\limits_0^t L(t-s)w(s)\,ds$, где $|w(s)|\leqslant N$. Для компенсации действий догоняющего мы получаем следующее уравнение «заглушки»:

$$\int\limits_0^t \pi e^{(t-s)C}v_2(s)\,ds+G^{-1}\int\limits_0^t L(t-s)\,w(s)\,ds=\int\limits_0^t \pi e^{(t-s)C}u(s)\,ds, \tag{3}$$

которое нужно уметь решать относительно $v_2(s)$, $w(s)$ хотя бы при малых t на одном и том же отрезке при любой измеримой $u(s)\in P$, причем $v_2(s)\in\nu Q$, $|w(s)|\leqslant N$, где константа $\nu<1$ и близка к 1, N — достаточно большая константа, а функция $u(s)$ известна при $0\leqslant s\leqslant t$. Уравнение (3) является линейным уравнением 1-го рода типа Вольтерра в свертках. С помощью аппарата сверток (см. [5]) можно дать следующие необходимые и достаточные условия для его разрешимости в рассматриваемом классе $v_2(s)$, $w(s)$: существуют такая константа $\tilde{\mu}>1$ и такая большая константа $\tilde{\lambda}\geqslant 0$, что при всех малых $r>0$ выполняется включение

$$\tilde{\mu}\pi(E-rC)^{-1}P\subset\pi(E-rC)^{-1}Q+G^{-1}\mathfrak{M}(r)S_{\tilde{\lambda}}, \tag{4}$$

где $\mathfrak{M}(r)$ — $(2\times n)$-матрица, которая имеет следующий блочный вид:

$$\mathfrak{M}(r)=\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_1(r)\\ 0\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{M}_1(r)=\begin{pmatrix} r^{k+1}, & 0\\ 0, & r^{l+1}\end{pmatrix},$$

$S_{\tilde{\lambda}}$ — 2-мерный шар с центром в 0 радиуса $\tilde{\lambda}$, E — единичная матрица порядка n.

Можно показать, что, если при всех малых $r>0$ и некоторых константах μ, λ, где $\mu>1$, $\lambda\geqslant 0$, выполняется включение

$$\mu\pi(E-rC)^{-1}P\overset{*}{\subset}\pi(E-rC)^{-1}Q+G^{-1}\mathfrak{M}(r)S_{\lambda}, \tag{5}$$

то можно путем параллельных трансляций множеств P и Q добиться того, что $0\in\operatorname{Int}Q$, $0\in\operatorname{Int}P$ и выполняется включение (4) (вообще говоря, $1<\tilde{\mu}\leqslant\mu$, а $\tilde{\lambda}\geqslant\lambda$). Эти трансляции компенсируются в (1) соответствующим изменением вектора a.

Итак, мы получили следующие

Условия убегания. Пусть для игры (1) существует такое двумерное подпространство $W\subset L$, для которого выполнено условие а). Пусть далее выполнено условие б): если имеет место I случай, то выполняется включение (2); если имеет место II случай, то выполняется включение (5).

Теорема. *Если выполнены условия убегания, то имеет место теорема убегания из работы* [3].

Доказательство. Случай I полностью разобран в [3]. В случае II выше мы схематически описали процесс компенсации действий догоняющего и маневр обхода на малом отрезке $[0, \theta]$. Сам процесс убегания и оценка снизу для расстояния точки $z(t)$ до M (терминального подпространства) производится аналогично работе [3].

Нетрудно видеть, что если выполнены условия теоремы убегания из [4], то выполняются и условия доказанной теоремы (даже при $\lambda=0$). Если выполнены условия убегания из [3], то условия нашей теоремы выполнены, это можно обосновать с помощью результатов работы [3].

Замечание. Матрица G в (5), как говорилось выше, определяется неединственным образом, однако (это доказывается), проверку включения (5) достаточно провести лишь для одной матрицы G, так как для всех других возможных матриц G результат будет тот же (константы λ, μ могут меняться).

Условия убегания настоящей статьи помимо игр, охватываемых работами [3, 4], охватывают еще некоторый класс игр. Приведем пример, в котором не выполнены условия убегания ни из [3], ни из [4], однако выполнены условия убегания нашей теоремы. Это несколько видоизмененный пример из ([4]).

Пример. Динамика догоняющего: $x_1^{(k_1+1)}=u_1$, $x_2^{(k_2+1)}=u_2$, где x_1, x_2 — скалярные величины, $1\leq k_1<k_2$, двумерный вектор $u\in P_0$ — двумерному выпуклому компакту в плоскости u_1, u_2. Динамика убегающего: $y_1^{(k_1)}=v_1$, $y_2^{(k_2)}=v_2$, где y_1, y_2 — скалярные величины, двумерный вектор $v\in Q_0$ — отрезку в плоскости v_1, v_2. Отрезок Q_0 будем считать содержащим внутри себя $(0, 0)$ и непараллельным прямым $v_1=0$, $v_2=0$. Подпространство M определяется как совокупность точек фазового пространства игры, удовлетворяющих условиям $x_1=y_1$, $x_2=y_2$.

Замечание. Для практической проверки условий теоремы и для практического осуществления маневра обхода весьма важно научиться находить для аналитической матрицы $F(r)$ матрицы $\Lambda(r)$, G, H. Это можно сделать сравнительно просто с помощью следующих элементарных операций над $F(r)$. Операция 1 состоит в перестановке двух любых столбцов матрицы, операция 2 — в умножении одного из столбцов на отличное от нуля число, операция 3 — в прибавлении к любому столбцу матрицы другого ее столбца, умноженного на произвольное число. Аналогичные операции вводятся над строками, обозначим их 1′, 2′, 3′. Каждая из операций 1, 2, 3 может быть осуществлена путем умножения матрицы справа на некоторую квадратную матрицу порядка β с ненулевым детерминантом. Каждая из операций 1′, 2′, 3′ может быть осуществлена путем умножения слева на некоторую квадратную матрицу порядка n с ненулевым детерминантом.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко,* Дифференциальные уравнения, № 3 (1971). [2] *Л. С. Понтрягин,* ДАН, т. 191, № 2 (1970). [3] *Л. С. Понтрягин,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 112 (1971). [4] *М. С. Никольский,* ДАН, т. 214, № 2 (1974). [5] *Я. Микусинский,* Операторное исчисление, ИЛ, 1956. [6] *М. С. Никольский,* Прикладная математика и программирование, № 9, Кишинев, 1973.