Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

И. А. КИПРИЯНОВ, Л. Н. ЛЯХОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 22 II 1974)

1. Пусть E_{n+1}^+ обозначает эвклидово пространство точек (x, y), где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y>0$. Обозначим через $S_{\text{чет}}$ множество функций $u(x, y)$, которые бесконечно дифференцируемы, четны по y и удовлетворяют оценкам

$$|\mathscr{D}_x{}^p \mathscr{B}_y{}^q u(x, y)| \leqslant \frac{C_{p,q,r}}{(1+|x|^2+y^2)^r}; \tag{1}$$

здесь $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$ и $r\geqslant 0$ — произвольные целые числа, а $C_{p,q,r}$ — постоянные, не зависящие от (x, y). Тогда, как известно, оператор Фурье — Бесселя отображает пространство $S_{\text{чет}}$ взаимно однозначно самого в себя.

Для любого вещественного числа s определим норму $\|u\|_{s,\gamma}$ по формуле

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 = \int\limits_{E_{n+1}^+} (1+|\xi|^2+t^2)^s |\hat{u}(\xi, t)|^2 t^{2\gamma}\, d\xi\, dt, \tag{2}$$

где $\hat{u}$ — преобразование Фурье — Бесселя u.

Обозначим через $H_{s,\gamma}$ гильбертово пространство, полученное пополнением $S_{\text{чет}}$ по этой норме. Если $s_1>0>s_2$, то имеют место вложения

$$H_{s_1,\gamma} \subset H_{0,\gamma} \subset H_{s_2,\gamma}.$$

В пространстве $H_{s,\gamma}$ можно ввести норму

$$|||u|||_{s,\gamma}^2 = \sum_{r+2q\leqslant s} \|\mathscr{D}_x{}^r \mathscr{B}_y{}^q u\|_{0,\gamma}^2, \tag{3}$$

которая в силу соответствующего равенства Парсеваля эквивалентна прежней норме,

$$\mathscr{B}_y = i^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\gamma}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Следуя Д. Д. Кону и Л. Ниренбергу [1] введем следующее

Определение. Будем говорить, что линейный оператор $\mathscr{L}$: $S_{\text{чет}} \to S_{\text{чет}}$ *имеет порядок* r, если для любого вещественного s найдется такая постоянная C_s, что

$$\|\mathscr{L}u\|_{s,\gamma} \leqslant C_s \|u\|_{s+r,\gamma} \tag{4}$$

для всех $u \in S_{\text{чет}}$.

Нижнюю грань всех таких порядков r оператора $\mathscr{L}$ назовем *истинным порядком* $\mathscr{L}$.

Если оператор $\mathscr{L}_1$ имеет порядок r_1, а оператор $\mathscr{L}_2$ — порядок r_2, то оператор $\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$ имеет порядок r_1+r_2.

Если $\varphi(\xi, t)$ — заданная функция от ξ и t, четная по t, то, следуя Фридрихсу, будем обозначать через $\varphi(\mathscr{D}, \mathscr{B})$ операцию умножения преобразования Фурье — Бесселя функции $u(x, y)$ на $\varphi(\xi, t)$ с последующим применением обратного преобразования Фурье — Бесселя.

Пусть $|\varphi(\xi, t)| \leqslant C(1+|\xi|^2+t^2)^\sigma$. Тогда оператор $\varphi(\mathscr{D}, \mathscr{B})$ имеет порядок 2σ. В частности, если носитель функции $\varphi(\xi, t)$ компактен, то истинный порядок $\varphi(\mathscr{D}, \mathscr{B})$ будет равен $-\infty$.

2. Пусть $a(x, y; \xi, t)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, четная по y и t и определенная при всех (x, y) из E_{n+1}^+ и $z \neq 0$ $(z=(\xi, t),\ t>0)$. Пусть, кроме того, она положительно однородна по z степени нуль. Допустим, что на полусфере $|z|=1$ $(t \geqslant 0)$ функция $a(x, y; \xi, t)$ имеет предел $a(\infty; z)$, когда $(x, y) \to \infty$, и что $a(x, y; z)-a(\infty; z)$, как функция (x, y), принадлежит $S_{\text{чет}}$ равномерно по z. Более того, мы будем предполагать, что то же самое верно для всех производных.

Такую функцию назовем символом.

Оператор $a(x, y; \mathscr{D}, \mathscr{B}) = A$ определим следующим образом:

$$\widehat{Au}(\xi, t) = (2\pi)^{-n/2} C_\gamma \int\limits_{E_{n+1}^+} e^{-ix\xi} j_{\gamma-1/2}(ty)\, a(x, y; \xi, t)\, u(x, y)\, y^{2\gamma}\, dx\, dy, \qquad (5)$$

т. е.

$$\widehat{Au}(\xi, t) = a(\infty; z)\, \hat{u}(z) + (2\pi)^{-n/2} C_\gamma \int\limits_{E_{n+1}^+} T_\tau^t \hat{a}'(\xi-\eta, \tau; z)\, \hat{u}(\eta, \tau)\, \tau^{2\gamma}\, d\eta\, d\tau,$$

где $a'(x, y; \xi, t) = a(x, y; \xi, t) - a(\infty; \xi, t)$, $\hat{a}'(\omega, z)$ — преобразование Фурье — Бесселя функции $a(x, y; z)$ по переменным (x, y).

Теорема 1. *Оператор $a(\infty; \mathscr{D}, \mathscr{B})$ действует из $H_{s,\gamma}$ в $H_{s,\gamma}$ и ограничен.*

Теорема 2. *Оператор A имеет порядок нуль.*

С помощью символа $a(x, y; \xi, t)$ можно построить и другой оператор. Положим по определению

$$\widehat{\mathscr{A}u}(x, y) = (2\pi)^{-n/2} C_\gamma \int\limits_{E_{n+1}^+} e^{ix\eta} j_{\gamma-1/2}(\tau y)\, a(x, y; \eta, \tau)\, \hat{u}(\eta, \tau)\, \tau^{2\gamma}\, d\tau\, d\eta, \qquad (6)$$

или, что то же самое,

$$\widehat{\mathscr{A}u}(\xi, t) = a(\infty; \xi, t)\, \hat{u}(\xi, t) + (2\pi)^{-n/2} C_\gamma \int\limits_{E_{n+1}^+} T_\tau^t \hat{a}'(\xi-\eta_1 t)\, \hat{u}(\omega)\, \tau^{2\gamma}\, d\tau\, d\eta, \qquad (7)$$

где $\omega = (\eta, \tau)$, $\tau > 0$.

Теорема 3. *Оператор $A - \mathscr{A}$ имеет порядок* -1.

3. Введем в рассмотрение функцию $\zeta(\xi, t)$, $t>0$, которая бесконечно дифференцируема, четна по t, равна единице при $|\xi|^2+t^2>1$ и равна нулю при $|\xi|^2+t^2<1/2$. Положим

$$\zeta_\sigma(\xi, t) = \zeta(\xi, t)\left(\sqrt{|\xi|^2+t^2}\right)^\sigma, \qquad (8)$$

где σ — вещественное число.

Соответствующий оператор обозначим через $\zeta_\sigma(\mathscr{D}, \mathscr{B})$. Мы хотим теперь изучить произведения и коммутаторы операторов $a(x, y; \mathscr{D}, \mathscr{B})$ друг с другом, с дифференциальными операторами и операторами $\zeta_\sigma(\mathscr{D}, \mathscr{B})$. Однако определение (5) не вполне подходит для этой цели. Чтобы обойти эту трудность, воспользуемся другим определением оператора A. Полагаем

$$\widehat{Au}(\xi, t) = \zeta(\xi, t)\, a(\infty; \xi, t)\, \hat{u}(\xi, t) +$$
$$+ (2\pi)^{-n/2} C_\gamma \int\limits_{E_{n+1}^+} T_\tau^t \hat{a}'(\xi-\eta, \tau; \xi, t)\, \hat{u}(\eta, \tau)\, \tau^{2\gamma}\, d\tau\, d\eta. \qquad (9)$$

Ясно, что операторы (5) и (9) различаются между собой на оператор порядка $-\infty$. Через $\mathscr{L}_{-\infty}$ обозначим алгебру операторов истинного порядка $-\infty$. Эта алгебра содержит операторы вида $\psi(\mathscr{D}, \mathscr{B})$, где $\psi(\xi, t)$ — бесконечно дифференцируемая, четная по t функция с компактным носителем в полушаре $|\xi|^2+t^2 \leqslant 1$, $t \geqslant 0$.

Рассмотрим далее операторы, действующие из $S_{\text{чет}}$ в $S_{\text{чет}}$ и являющиеся суммами операторов, истинные порядки которых убывают до $-\infty$, и имеющие вид

$$A=\zeta_\sigma(\mathcal{D},\mathcal{B})a_0(x,y;\mathcal{D},\mathcal{B}), \qquad (10)$$

где $a_0(x,y;\mathcal{D},\mathcal{B})$ — оператор, определенный по формуле (9).

Оператор (10) будем называть каноническим степени σ и каждому такому оператору поставим в соответствие функцию

$$a(x,y;\xi,t)=(\sqrt{|\xi|^2+t^2})^\sigma a_0(x,y;\xi,t),$$

которую снова будем называть символом.

Пусть A и B — два канонических оператора степени соответственно σ и λ вида (10). Произведение AB запишется в виде

$$\widehat{ABu(\xi,t)}=(2\pi)^{-n/2}C_\nu^2\int\limits_{\overset{+}{E}_{n+1}\times\overset{+}{E}_{n+1}} T_{\tau'}{}^t\hat{g}(\xi-\eta,\tau';\xi,t)\times$$

$$\times T_\tau{}^{\tau'}\hat{h}(\eta'-\eta,\tau;\eta',\tau')\hat{u}(\eta,\tau)\tau^{2\nu}\tau'^{2\nu}\,d\eta\,d\tau\,d\eta'\,d\tau'. \qquad (11)$$

С другой стороны, можно определить канонический оператор $P_0 (\mathrm{mod}\,\mathcal{L}_{-\infty})$ степени $\sigma+\lambda$ следующим образом:

$$\widehat{P_0u(\xi,t)}=(2\pi)^{-n/2}C_\nu^2\int\limits_{\overset{+}{E}_{n+1}\times\overset{+}{E}_{n+1}} T_{\tau'}{}^t\hat{g}(\xi-\eta',\tau';\xi,t)\times$$

$$\times T_\tau{}^{\tau'}T_{\tau'}{}^t\hat{h}(\eta'-\eta,\tau;\xi,\tau')\hat{u}(\eta,\tau)\tau^{2\nu}\tau'^{2\nu}\,d\eta\,d\tau\,d\eta'\,d\tau'.$$

Пусть ρ — целое положительное число. С помощью формулы Тейлора — Дельзарта разность $AB-P_0$ может быть представлена в виде $AB-\sum\limits_{\gamma=0}^{\rho-1}P_r=T$, где P_r и $T (\mathrm{mod}\,\mathcal{L}_{-\infty})$ — соответствующим образом определенные операторы.

Теорема 4. *Оператор T имеет порядок, равный $\sigma+\lambda-\rho$, где σ — степень оператора A и λ — степень оператора B.*

Таким образом, фактически получена формула для произведения операторов $(\mathrm{mod}\,\mathcal{L}_{-\infty})$

$$AB=\sum_{r=0}^{\infty}P_r.$$

Имеет место и каноническое представление для коммутатора операторов A и B.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
21 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг,* Алгебра псевдодифференциальных операторов, Сборн. пер., М., 1967.