Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 518:517

МАТЕМАТИКА

И. Н. МОЛЧАНОВ, Е. Ф. ГАЛБА

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 1 III 1974)

В настоящей статье исследуется сходимость разностных схем, аппроксимирующих осесимметричную задачу теории упругости. Доказано, что при достаточной гладкости исходного решения разностная схема сходится в равномерной метрике со скоростью $O(h^2 \ln (1/h))$.

Заметим, что в [1] доказана сходимость разностных схем со скоростью $O(h^2\sqrt{\ln (1/h)})$ в метрике пространства $W_2^{(1)}$.

1. Рассмотрим смешанную осесимметричную задачу теории упругости для круговой изотропной цилиндрической оболочки

$$
\begin{gathered}
-(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial r}-2\mu\frac{\partial\omega}{\partial z}=f^{(1)}(r,z),\\
-(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{2\mu}{k}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega)=f^{(2)}(r,z),\qquad (r,z)\in G;
\end{gathered}
\tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}=\mathbf{g}(r,z),\qquad (r,z)\in\Gamma_1,\\
-\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}\right)\cos(n,r)-\mu\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r}\right)\cos(n,z)=q^{(1)}(r,z),\\
-\mu\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r}\right)\cos(n,r)-\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}\right)\cos(n,z)=\\
=q^{(2)}(r,z),\qquad (r,z)\in\Gamma_2,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где

$$
\theta=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}+\frac{u^{(1)}}{k}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z},\qquad 2\omega=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}-\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r},
$$

G — прямоугольник с границей Γ, $\bar G=G\cup\Gamma=\{0\leqslant r\leqslant l_1,\ 0\leqslant z\leqslant l_2\}$, $\mathbf{u}=(u^{(1)}, u^{(2)})$ — вектор упругих перемещений, $k=r_0+r$, $r_0>0$ — внутренний радиус оболочки, λ, μ — постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства материала, n — внутренняя нормаль к Γ.

Будем предполагать, что точками пересечения Γ_1 и Γ_2 являются угловые точки.

Не ограничивая общности, рассмотрим задачу при $\Gamma_2=\Gamma_2^1\cup\Gamma_2^2\cup\Gamma_2^3$, где $\Gamma_2^1=\{r=0,\ 0\leqslant z\leqslant l_2\}$, $\Gamma_2^2=\{r=l_1,\ 0\leqslant z\leqslant l_2\}$, $\Gamma_2^3=\{z=0,\ 0\leqslant r\leqslant l_1\}$, $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

В дальнейшем ось r будем обозначать через x_1, а ось z — через x_2.

2. Введем равномерную по x_1, x_2 сетку

$$
\bar\omega=\{(x_{i_1}, x_{i_2})\in\bar G,\ x_{i_\alpha}=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha=1,2\}.
$$

Обозначим через $\omega=\{(x_{i_1}, x_{i_2})\in G\}$ множество внутренних узлов, $\gamma=\bar\omega\setminus\omega$ — множество граничных узлов, γ_0 — множество угловых точек γ, принадлежащих $\Gamma_2\setminus\{\Gamma_2\cap\Gamma_1\}$. Тогда $\gamma=\gamma_0\cup\gamma_1\cup\gamma_2$, где $\gamma_1=\{x\in\Gamma_1\}$, $\gamma_2=\{x\in\Gamma_2\}\setminus\{(\Gamma_2\cap\Gamma_1)\cup\cup\gamma_0\}$. Через ω^* обозначим множество узлов внутри области ω и на $\gamma_2\cup\gamma_0$, т. е. $\omega^*=\bar\omega\setminus\gamma_1$.

Пусть Ω — пространство сеточных вектор-функций, заданных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль на γ_1.

В Ω введем скалярное произведение

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{\alpha=1}^{2} (y^{(\alpha)}, z^{(\alpha)}), \quad (y, z) = \sum_{x \in \omega^*} yzH, \tag{3}$$

где

$$H = H(x) = (\hbar_1 \hbar_2)_{i_1, i_2}, \quad \hbar_1 = \begin{cases} h_1, & i_1 \neq 0, N_1, \\ h_1/2, & i_1 = 0, N_1, \end{cases} \quad \hbar_2 = \begin{cases} h_2, & i_2 \neq 0, \\ h_2/2, & i_2 = 0. \end{cases}$$

Определим нормы

$$\|\mathbf{y}\| = (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}, \quad \|\mathbf{y}\|_C{}^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} \|y^{(\alpha)}\|_C{}^2, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \omega^*} |y(x)|. \tag{4}$$

3. Для построения разностной схемы, аппроксимирующей задачу (1), (2), используем вариационный подход (см. ([1], [2])). Получим разностную задачу

$$\mathrm{A}\mathbf{y} = \mathbf{F}(x), \; x \in \omega^*, \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(x), \; x \in \gamma_1. \tag{5}$$

В Ω введем вспомогательный оператор

$$R = \sum_{\alpha=1}^{2} R_\alpha, \tag{6}$$

где

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} -\Lambda_\alpha & 0 \\ 0 & -\Lambda_\alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda_\alpha y = \begin{cases} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, & i_\alpha \neq 0, N_\alpha, \quad i_2 \neq N_2 \text{ при } \alpha = 1, \\ 2/(h_\alpha y x_\alpha), & i_\alpha = 0, \quad i_2 \neq N_2, \\ -2/(h_1 y \bar{x}_1), & i_1 = N_1, \quad i_2 \neq N_2. \end{cases}$$

Оператор A разностной задачи (5) в Ω самосопряжен и положительно определен. Из ([2]) следует, что для любой вектор-функции $\mathbf{v} \in \Omega$ выполняется соотношение

$$c_1 (R\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leqslant (\mathrm{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leqslant c_2 (R\mathbf{v}, \mathbf{v}), \tag{7}$$

где c_1 и c_2 — константы, не зависящие от $\mathbf{v}$ и h.

4. Оценим скорость сходимости разностной схемы. Для этого рассмотрим функцию $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{u}$, где $\mathbf{y}$ — решение задачи (5), а $\mathbf{u}$ — решение задачи (1), (2). Для $\mathbf{z}$ получим задачу

$$\mathrm{A}\mathbf{z} = \boldsymbol{\psi}(x), \; x \in \omega^*, \quad \mathbf{z} = 0, \; x \in \gamma_1, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\psi}$ — погрешность аппроксимации разностной задачи (5) на решении задачи (1), (2) (см. ([3])).

Лемма 1. *Если решение задачи* (1), (2) $u \in C^{(4)}(\bar{G})$, *то*

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) \leqslant Mh^2, & x \in \omega, \\ \psi_2(x) \leqslant Mh, & x \in \gamma_2, \\ \psi_3(x) \leqslant M, & x \in \gamma_0, \end{cases} \tag{9}$$

где $h = \max\{h_1, h_2\}$, M *— константа, не зависящая от* h.

Через $\bar{\Lambda}$ обозначим оператор $\bar{\Lambda} = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha$.

Рассмотрим задачу на отыскание собственных функций и собственных значений

$$\begin{aligned} &\bar{\Lambda} \mu_{k_1, k_2}(x) + \lambda_{k_1, k_2} \mu_{k_1, k_2}(x) = 0, \quad x \in \omega^*, \\ &\mu_{k_1, k_2}(x) = 0, \quad x \in \gamma_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Лемма 2. *Решение задачи* (10) *имеет вид*

$$\mu_{k_1,k_2}(x)=\prod_{\alpha=1}^{2}\mu_{k_\alpha}(x_\alpha),\quad \lambda_{k_1,k_2}=\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{k_1\pi h_1}{2l_1}+$$

$$+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2(2k_2-1)}{4l_2},\quad k_1=0,1,\ldots,N_1;\quad k_2=1,2,\ldots,N_2,$$

где

$$\mu_{k_1}(x_1)=\sqrt{2/l_1}\cos\frac{k_1\pi x_1}{l_1},\quad k_1=1,2,\ldots,N_1-1,$$

$$\mu_0(x_1)=\sqrt{1/l_1},\quad \mu_{N_1}(x_1)=\sqrt{1/l_1}\cos\frac{N_1\pi x_1}{l_1},$$

$$\mu_{k_2}(x_2)=\sqrt{2/l_2}\cos\frac{\pi x_2(2k_2-1)}{2l_2},\quad k_2=1,2,\ldots,N_2,$$

причем набор сеточных функций образует ортонормированную в смысле скалярного произведения (3) *систему.*

При доказательстве леммы 2 использовались результаты [4].

Введем разностную функцию Грина $G_0(x,\xi)$, которая, как функция x, при фиксированном $\xi\in\omega^*$ является решением задачи

$$\tilde{\Lambda}_x G_0(x,\xi)=\frac{\delta(x,\xi)}{H},\quad x,\xi\in\omega^*;$$

$$G_0(x,\xi)=0,\quad x\in\gamma_1,\quad \xi\in\omega^*, \tag{11}$$

где

$$\tilde{\Lambda}=-\sum_{\alpha=1}^{2}\Lambda_\alpha,\quad \delta(x,\xi)=\begin{cases}1, & x=\xi,\\ 0, & x\neq\xi.\end{cases}$$

Лемма 3. *Для функции* $G_0(x,\xi)$, *определенной соотношением* (11), *имеет место оценка*

$$|G_0(x,x)|\leqslant c\ln(1/h^*), \tag{12}$$

где c — *константа, не зависящая от* h, $h^*=\min\{h_1,h_2\}$.

Для доказательства леммы 3 используется разложение функции Грина по собственным функциям и собственным значениям оператора $\tilde{\Lambda}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда решение* $\mathbf{y}$ *задачи* (5) *сходится в сеточной норме пространства* C *к решению* $\mathbf{u}$ *задачи* (1), (2) *со скоростью* $O(h^2\ln(1/h^*))$, т. е. *имеет место оценка*

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{u}\|_C\leqslant M_1h^2\ln(1/h^*), \tag{13}$$

где M_1 — *константа, не зависящая от* h.

Для доказательства теоремы вводится матрица Грина соотношением

$$A_x\mathfrak{G}(x,\xi)=\frac{1}{H}\mathfrak{D}(x,\xi),\quad x,\xi\in\omega^*; \tag{14}$$

$$\mathfrak{G}(x,\xi)=0,\quad x\in\gamma_1,\quad \xi\in\omega^*,$$

где

$$\mathfrak{G}(x,\xi)=\begin{pmatrix} G_1^{(1)}(x,\xi) & G_2^{(1)}(x,\xi) \\ G_1^{(2)}(x,\xi) & G_2^{(2)}(x,\xi) \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{D}(x,\xi)=\begin{pmatrix} \delta(x,\xi) & 0 \\ 0 & \delta(x,\xi) \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы Грина оцениваются через $G_0(x, x)$.

При доказательстве используется соотношение (7), леммы 1 и 3.

В заключение авторы благодарят чл.-корр. АН СССР А. А. Самарского за постоянное внимание к работе.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
4 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. Д. Лазарев*, Кандидатская диссертация, М., 1972. [2] *И. Г. Белухина*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, т. 8, № 4, 808 (1968). [3] *А. А. Самарский*, Введение в теорию разностных схем, М., 1971. [4] *В. Б. Андреев*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, т. 9, № 6, 1285 (1969).