

Г. В. ГАДНЯК, Ф. М. ИЗРАЙЛЕВ

СТРУКТУРА ПЕРЕХОДНОЙ ЗОНЫ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

(Представлено академиком А. Н. Скрипским 4 II 1974)

Известно, что движение динамической системы при некоторых условиях становится нерегулярным, практически не отличающимся от случайного. Такое движение принято называть стохастическим (см., например, обзор (1)). Наибольший интерес с точки зрения различных конкретных приложений представляют колебательные системы. Численные эксперименты, проведенные с нелинейными системами такого типа, показали (2-4), что действительно, при выполнении некоторого критерия даже в системе с малым числом степеней свободы движение становится стохастическим и к системе применимы статистические законы. Для такого класса систем характерным является то, что вся их фазовая поверхность состоит из двух компонент — устойчивой и стохастической. По этой причине такие системы было предложено называть системами с разделенным фазовым пространством (5). Граница между устойчивой и стохастической областью по существу не может быть резкой, должна существовать некоторая переходная зона. Численному исследованию структуры переходной зоны для простейшей модельной системы и посвящена настоящая работа.

Модель описывает поведение одномерного нелинейного осциллятора и задается преобразованием (1)

$$p_{n+1} = p_n + f(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \quad f(x_n) = -x_n^3, \quad (1)$$

где p и x — импульс и координата осциллятора, $f(x)$ — внешняя, нелинейная сила, действующая в виде толчков с периодом $M=1$. Основным методом исследования служило определение типа движения на фазовой плоскости за достаточно большое число преобразований N .

Для подобной системы преобразований было доказано (6) существование вечно устойчивых замкнутых траекторий, которые по общей теории КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера (7, 8, 6)) являются перезонансными торами (кривыми), деформированными под действием возмущения. Между этими замкнутыми траекториями расположены резонансы, обусловленные целочисленными соотношениями между собственной частотой и частотой возмущения. Границей области нелинейного резонанса служит сепаратриса, в окрестности которой всегда образуется стохастический слой (9). Область, ограниченная сепаратрисой, определяет нелинейную ширину резонанса. Таким образом, фазовая поверхность (p, x) системы (1) вблизи устойчивого центра ($p=x=0$) расщепляется на семейство замкнутых устойчивых траекторий, между которыми расположены «гирлянды» резонансов высоких гармоник. При попадании на сепаратрису какого-либо резонанса движение становится неустойчивым, но эта неустойчивость может быть ограничена областью между двумя замкнутыми устойчивыми траекториями. При дальнейшем удалении от центра, в силу возрастания возмущения $f(x)$, резонансы различных гармоник должны частично перекрываться, образуя переходную зону. При полном же перекрытии резонансов, как известно, образуется собственно стохастическая область (1).

Для определения границы вечной устойчивости была предпринята попытка численно найти наиболее удаленную от центра устойчивую траекторию. Рассматривался малый участок ($\Delta x \approx 10^{-6}$) устойчивой траектории за достаточно большое время и определялось, ложатся ли точки на гладкую кривую или же распределяются случайно. Для достижения большей точности проводилась интерполяция на кривую 2-го порядка, причем счет велся с удвоенной точностью. При этом ошибки округ-

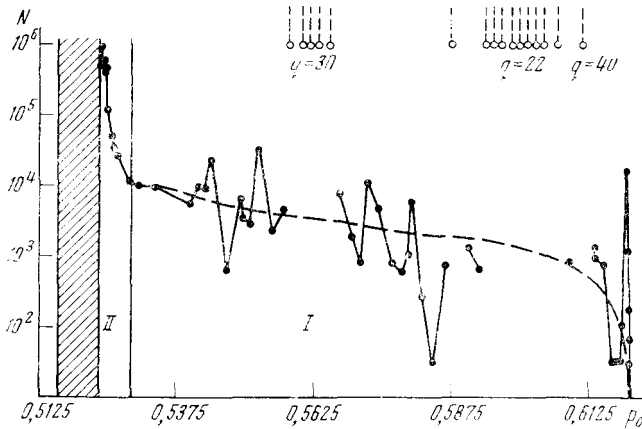


Рис. 1. Зависимость числа преобразований N от начальных условий ($p = p_0$, $x=0$). Кружками помечены резонансы, q — номер гармоники резонанса. N — число преобразований, при котором траектория выходит за фазовый квадрат ($|x|=|p|=1$; счет велся до $N_m=10^6$)

ления на ЭВМ БЭСМ-6 составляют $\Delta_r \approx 10^{-24}$. Это позволило свести к минимуму диффузию, обусловленную ошибками округления. Коэффициент диффузии из-за ошибок округления оказался равным $D_{\text{числ}} \approx 2 \cdot 10^{-51}$, что в 150 раз меньше, чем при случайности ошибок округления. Оказалось, что при выбранном способе интерполяции ошибки округления для определения граничной устойчивой траектории незначительны, поскольку точность при этом начинает определяться отклонением от интерполяционной кривой и составляет $\Delta \approx 10^{-19} - 10^{-20}$. Устойчивой траекторией считалась такая, для которой при числе преобразований $N_m = 5 \cdot 10^6 - 10^7$ на рассматриваемом участке точки, определяющие отклонение от интерполяционной кривой, ложатся на какую-нибудь гладкую кривую. В результате был получен следующий интервал значений, внутри которого находится граница вечной устойчивости:

$$\begin{aligned} \text{по } p \text{ (для } x=0\text{): } & 0,5174 < p_c < 0,5236; \\ \text{по } x \text{ (для } p=0\text{): } & 0,77 < x_c < 0,78. \end{aligned}$$

Между устойчивыми траекториями, как и ожидалось, были обнаружены резонансы высших гармоник и окружающие их сепаратрисы. Используя критерий локальной неустойчивости (4), можно приближенно найти границу вечной устойчивости $x_c \approx (4/3)^{1/2}$. Видно, что по порядку величины оценка совпадает с полученным результатом. При дальнейшем удалении от центра становится заметной диффузия траекторий, превышающая ошибки округления и ошибки метода обработки. Задавая различные начальные данные и двигаясь по оси p , получили зависимость $N(p_0)$, где N — число преобразований, при котором траектория выходит в стохастическую область и покидает рассматриваемый единичный квадрат ($|p| < 1$, $|x| < 1$) на фазовой плоскости.

Счет производился до $N_m = 10^6$. На рис. 1 приведена полученная зависимость. Вертикальные пунктирные прямые означают, что траектория для соответствующих начальных условий представляет собой резонанс и потому устойчива. Из рисунка видно, что диффузия в переходной зоне очень

перерегулярна и сильно зависит от положения на фазовой плоскости. Подобная зависимость наблюдалась в (10), где исследовалось разрушение магнитных поверхностей тороидального винтового поля вблизи сепаратрисы.

По виду зависимости $N(\rho_0)$ можно выделить две области в промежуточной зоне: I — относительно широкое плато со «временем жизни» $N \approx 10^5 - 10^6$ и с соответствующим коэффициентом диффузии $D \approx 10^{-6}$, II — приграничная область с резким уменьшением скорости диффузии. Часть области II (заштрихованная) состоит в основном из устойчивых резонансов или сепаратрис, их окружающих.

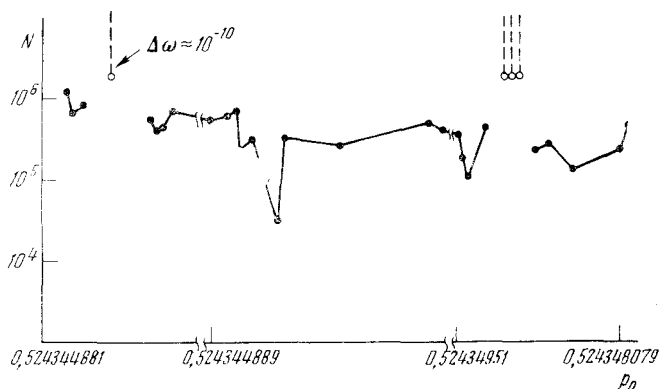


Рис. 2. Часть области II из рис. 1 с растяжением по ρ . Волнистые линии обозначают разрыв масштаба, $N_m = 2 \cdot 10^6$

ратрис, их окружающих. В этом промежутке не удалось найти устойчивую траекторию. Очевидно, здесь диффузия чрезвычайно мала и за $N_m = 10^6$ неустойчивость не успевает развиваться. Действительно, оценка для коэффициента диффузии дает $D_{\text{теор}} \sim (\Delta\omega)^2$, где $\Delta\omega$ — ширина резонансов, в этой области она очень мала. К примеру, здесь был обнаружен резонанс с шириной $\Delta\omega \approx 10^{-10}$. Ясно, что траектория на сепаратрисе такого резонанса может надолго «застывать». На рис. 2 представлена более детально область II , растянутая по ρ . Волнистой линией помечены места в разрыве масштаба. Сравнивая оба рисунка, можно сделать заключение, что структура областей I и II одинакова; различие, очевидно, лишь в том, что в области II резонансы более высоких гармоник и ширина их значительно меньше.

Механизмом, ответственным за слабую неустойчивость в переходной зоне, является зацепление сепаратрис соседних резонансов. Траектория в местах зацепления может переходить на сепаратрису другого резонанса. Блуждая по этим разрушенным слоям, траектория должна пройти всю переходную зону и выйти в стохастическую область. Резкий спад на краю области I показывает, что в этом месте начинается полное перекрытие резонансов и траектория выходит в стохастическую область. Переходная зона оказывается довольно значительной по ширине и составляет $\approx 10\%$ от единичного интервала.

Интересным является резкое изменение скорости диффузии при переходе из области II в область I . По-видимому, в переходной зоне такая сглаженная зависимость является типичной, в какой-то степени не зависящей от конкретного вида $f(x)$. Однако этот вопрос остается открытым так же, как и вопрос о конкретном виде этой зависимости.

В заключение приносим свою благодарность Б. В. Чирикову за ценные советы и замечания, а также В. П. Минаеву за помощь в проведении вычислений.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
15 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, УФН, т. 105, 3 (1971). ² Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, ДАН, т. 159, 306 (1964). ³ Ф. М. Израйлев, А. И. Хисамутдинов, Б. В. Чириков, Препринт № 252 Ин-та ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск, 1968.
- ⁴ Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством, Препринт Ин-та ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск, 1968. ⁵ Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, ДАН, т. 166, 57 (1966).
- ⁶ J. Moser, A. Rapidly Convergent Iteration Method and Nonlinear Differential Equations, II Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, v. 20, Fasc. III, 1966.
- ⁷ А. Н. Колмогоров, ДАН, т. 98, 527 (1954). ⁸ В. И. Арнольд, УМН, т. 18, 91 (1963).
- ⁹ В. К. Мельников, ДАН, т. 148, 1257 (1963). ¹⁰ А. В. Кокин, Л. С. Красицкая, В. И. Минаев, Препринт № 225 Ин-та ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск, 1968.