Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 513.82

МАТЕМАТИКА

Академик А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

К ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

1. Пусть в аффинном пространстве A задан «переносимый», т. е. инвариантный относительно параллельных переносов, предпорядок. Тем самым каждой точке $x \in A$ отнесены множества

$$P_x = \{y:\ y \geqslant x\}, \quad P_x^- = \{y:\ y \leqslant x\}.$$

Любое P_x переводится в любое P_z переносом $x \to z$. Поэтому переносимый предпорядок задается множеством P_a, отнесенным какой-либо данной точке a. Замыкания $\bar{P}_x$ множеств P_x также определяют переносимый предпорядок; он задается множеством $\bar{P}_a$. Мы предполагаем предпорядок нетривиальным, т. е. $P_a \neq (a)$, и таким, что выполняется условие

P0. При всякой $b \in P_a$ множество $P_a \cap P_b^-$ ограничено.

Итак, в дальнейшем подразумевается, что речь идет о переносимом нетривиальном предпорядке с условием P0 в аффинном пространстве A. Впрочем, из P0 непосредственно следует, что такой предпорядок является порядком.

Пусть G_a — группа всех таких взаимно однозначных отображений g A на себя, что $g(a) = a$ и $g(P_x) = P_{g(x)}$ при всех $x \in A$, или, что равносильно, $g(x) \leqslant g(y)$, если и только если $x \leqslant y$.

Вводим условия:

G1. При всех $x,\ y \in \partial P_a \setminus (a)$ существует такое $g \in G_a$, что $g(x) = y$.

G2. То же для $x,\ y \in \mathring{P}_a = P_a \setminus \partial P_a$.

Оба условия выполняются, если P_a — полупрямая. Исключаем этот случай, вводя условие

P1. P_a не является полупрямой.

Теорема 1. *При условиях* G1, G2, P1 *множество P_a есть либо замкнутый, либо открытый эллиптический конус, а группа G_a, если* $\dim A > 2$, *является группой Лоренца с растяжениями.*

Т. е. существует такая система декартовых координат $x_0, x_1, \ldots, x_n$ с началом в точке a, что:

1) множество P_a задается либо неравенствами $(xx) \equiv x_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$, $x_0 \geqslant 0$, либо $(xx) > 0$, $x_0 > 0$, с добавлением точки $a = (0, \ldots, 0)$;

2) если $\dim A > 2$, то G_a представляются прямым произведением группы линейных преобразований, сохраняющих форму (xx), но без преобразований с $x_0' = {}^-x_0$, и группы преобразований $x_i = \lambda x_i$; $\lambda > 0$, $i = 0, \ldots, n$. (Если же $\dim A = 2$, то G_a состоит не только из аффинных преобразований.)

2. Теперь мы ставим вопрос: какими условиями можно заменить G1 или G2, чтобы утверждение теоремы 1 сохранилось? Здесь мы рассмотрим только замену условия G2, оставив вопрос о замене G1 до следующей статьи. Введем условие

P2. $a \in \overline{\mathring{P}_a \setminus (a)}$, т. е. a есть точка сгущения $\mathring{P}_a$.

Теорема 2. *При условиях* G1, P1, P2 *множество P_a представляется в подходящих координатах неравенством*

$$x_0 \geqslant r^p, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad 0 < p \leqslant 1,$$

или $x_0 > r^p$ с добавлением точки $a = (0, \ldots, 0)$. При $p = 1$ получается ре-

зультат теоремы 1, а при $p<1$ *группа* G_a *порождается преобразованиями* $x_0'=\lambda_{x_0}^{\rho}$, $x_i'=\lambda_{x_i}$, $\lambda>0$, $i=1,\ldots,n$, *и ортогональными преобразованиями с неизменными* x_0.

Следствие. При условии G1 результат теоремы 1 обеспечивается любыми условиями, которые в соединении с G1 влекут P1, P2 и исключают случай $p<1$ в теореме 2. Например, его исключают каждое из следующих далее условий G3, P3, P4; (кроме них мы формулируем еще G4).

G3. P_a не содержит луча с началом a, сохраняемого группой G_a (это включает P1).

G4. Существует такая точка $b\in\bar{P}_a$ и такое $g\in G_a$, что $g(b)\in P_b$ (это влечет P2).

P3. При некоторой $b\in\partial P_a\setminus(a)$ $P_a\cap P_b\neq(a, b)$, т. е. множество $\bar{P}_a\cap\bar{P}_{\bar{b}}$ не состоит только из a и b. Тогда при условии G1 то же верно для всех $b\in\bar{P}_a\setminus(a)$ (а это влечет P2).

P4. Будем говорить, что множество L направлено из a в P_a, если $a\in L\in\bar{P}_a$ и L связано и линейно упорядочено в предпорядке, задаваемом $\bar{P}_a$. Условие состоит в том, что $\bar{P}_a$ содержит два такие множества L_1, L_2, причем $L_1\not\subset L_2$ и $L_2\not\subset L_1$ (это включает P1 и P2 и, как оказывается, равносильно тому, что P_a содержит два луча, исходящих из a).

Теорема 3. *Утверждение теоремы 1 выполняется, если вместе с условием* G1 *выполняется одно из следующих групп условий*: 1) P4; 2) P3, P1; 3) G3, P2; 4) G3, G4.

Из условий G1, G2, P1 очевидно следуют G1, G3, G4, так что теорема 1 является прямым следствием последней части теоремы 3.

Замечание. Порядок с условием G1, но без P2 задается, например, множеством P_a, состоящим из тела $x\geqslant(1+r^2)^{1/2}$ и точки $a=(0,\ldots,0)$; здесь G_a — группа Лоренца. Определением всех порядков с условием G1, но без P2 мы займемся в другой работе.

3. Отметим две теоремы, используемые в доказательстве теорем 2, 3 и связанные с условиями P3, P4.

Теорема 4. *Если* $\bar{P}_a\cap\bar{P}_b\neq(a, b)$ *при всех* $b\in\bar{P}_a\setminus(a)$, *то* $\bar{P}_a$ — *конус*.

Теорема 5. *Множество, направленное на а в* $\bar{P}_a$, *является гомеоморфным и изотонным (взаимно монотонным) образом отрезка* $[0, 1]$ *или* $[0, 1]$. *Если выполнено* P2, *т. е.* $a\in P_a\setminus(a)$, *то* $\bar{P}_a$ *содержит по крайней мере один луч с началом а; такой луч, очевидно, является множеством, направленным из а в* $\bar{P}_a$. *Вместе с тем сумма всех таких множеств представляет собою конус, образованный лучами с началом а, содержащимися в* $\bar{P}_a$.

Эта теорема усиливает теорему, доказанную в [1]. Из нее следует, что как было отмечено, условие P4 равносильно тому, что $\bar{P}_a$ содержит два луча с началом a.

4. Условия теорем 1, 3 могут рассматриваться как аксиомы, определяющие (при $\dim A>2$) геометрию Минковского — геометрию группы Лоренца, если их присоединить к тому или иному определению аффинного пространства; наиболее подходящим представляется следующее.

Аффинное пространство есть локально-компактное, связное, односвязное хаусдорфово пространство R с транзитивной, коммутативной группой T его гомеоморфизмов на себя. Именно, в R можно ввести координаты $x_0, \ldots, x_n$ так, что отображения $t\in T$ представляются как $(x_i)\to(x_i+a_i)$; причем переход от одних таких координат к другим осуществляется линейным преобразованием (группа T оказывается просто транзитивной благодаря коммутативности и потому сказанное следует из известных результатов [4, 5], касающихся коммутативных топологических групп).

Таким образом, можно относить наши теоремы к порядкам в пространстве R, инвариантным относительно группы T.

5. В пространстве-времени имеется причинный порядок: точка y («мировая точка» y) следует за x, если событие в x воздействует на событие в y: от x к y передается импульс-энергия. Множество P_x замкнуто;

его граница ∂P_x есть световой конус — множество точек-событий, до которой доходит прямой (не рассеянный) свет. Соответственно вводимые нами условия имеют следующий физический смысл в обычных терминах.

Условие P0 выражает ограниченность скорости передачи воздействий (сигналов), а P1 — то, что эта скорость не равна нулю. Условие P3 означает, что воздействие не передается прямо от одной точки a к другой b «скачком», без того, чтобы пройти промежуточные события; P2 выражает ослабленную форму этого требования: есть точки-события, до которых воздействие от a переходит не скачком. Множество L, направленное из a в P_a, представляет движение частицы от точки a (ее четырехмерную траекторию), так что условие P4 означает существование (возможность существования) по меньшей мере двух различных движений из одной точки. Теоремы 4, 5 означают, что непрерывные движения (передачи воздействий) от данной точки a заполняют конус: всякое событие, непрерывно достижимое из a, достижимо по лучу из a, т. е. инерциальным движением или прямым светом.

Переносимость порядка, так же как условия G1, G2, означают максимальную однородность и изотропность, совместимую с самим существованием порядка; они служат также некоторым эквивалентом принципа относительности.

Таким образом, наши результаты дают физически осмысленную аксиоматику пространства-времени частной теории относительности.

6. Укажем общий ход доказательства теорем 1, 2.

1) При условиях G1, P1 $\overset{\circ}{P}_a\neq\varnothing$. Допустим $\overset{\circ}{P}_a=\varnothing$. Тогда из G1 следует, что $\partial P_a=P_a$, так что P_a замкнуто и G_0 транзитивна на P_a. Но это, как можно убедиться, возможно лишь, если P_a есть полупрямая, что исключено по P1.

2) При G1, G2, P1 выполняется P2. По 1) $\overset{\circ}{P}_a\neq\varnothing$. Пусть $b\in\overset{\circ}{P}_a$. Тогда, если точка c такова, что $\overrightarrow{ac}=2\overrightarrow{ab}$, то $b<c\in\breve{P}_a$. По G2 $b=g(c)$, так что $g(c)<c$, $g^n(c)>g^{n+1}(c)$. Из P0 следует, что есть сколь угодно близкие одна к другой точки $g^n(c)$, $g^m(c)$. Поэтому есть сколь угодно близкие к a точки $x\in P_a\setminus(a)$.

Итак, мы можем считать дальше, что выполнены G1, P2 и $\overset{\circ}{P}_a\neq\varnothing$.

3) Отображения $g\in G_a$ непрерывны. Из G1 следует, что либо $P_a=\overline{P}_a$, либо $P_a\setminus(a)=\overset{\circ}{P}_a$. Поэтому непрерывность g следует из теоремы, доказанной в [3] (если применить ее к множествам $P_x\cap P_y^-$, получаемым из данного $P_a\cap P_b^-$ переносами).

4) Пусть C_a — конус, образованный лучами из a, содержащимися в P_a. Тогда: A) $g(C_a)=C_a$ при всяком $g\in G_a$; B) либо C_a есть луч, либо $\overset{\circ}{C}_a\neq\varnothing$. A) следует, благодаря 3), из теоремы, доказанной в [1]. B) следует из A) и G1.

5) Все $g\in G_a$ аффинны. При $\overset{\circ}{C}_a\neq 0$ это следует из [1] (имеющийся там особый случай исключается благодаря G1). Пусть C_a — луч. При любых b, $c\in C_a$ отрезки на лучах $C_x\| C_a$ между ∂P_b и ∂P_c равны. Исходя отсюда, можно прийти к выводу, что при всяком $g\in G_a$ равные отрезки на лучах C_x переходят в равные и потому множества $P_y\cap P_z^-$ с равными отрезками $yz\subset C_x$ переходят в такие же множества. А так как отрезки yz могут быть сколь угодно малыми, то g аффинно.

6) Если $\overset{\circ}{C}_a\neq\varnothing$, то $\overline{P}_a=C_a$ и C_a — эллиптический конус. Пусть K_a — конус, проектирующий P_a из точки a. Из 5) следует, что $g(K_a)=K_a$. Если $K_a\neq C_a$, то, добавляя к G_a подобия с центром a, получаем аффинную группу, транзитивную на $K_a\setminus C_a$. Но, как нетрудно видеть, такой группы быть не может. Поэтому $K_a=C_a$, откуда $\overline{P}_a=C_a$. Поэтому G_a транзитивна на ∂C_a и, согласно [2], конус C_a — эллиптический.

Этим доказана теорема 1 и та часть теоремы 2, где $\overset{\circ}{C}_a\neq\varnothing$.

7) Пусть теперь C_a — луч. На $K_a \setminus C_a$ действует транзитивная аффинная группа. Но это, как легко видеть, возможно лишь тогда, когда K_a — полупространство. Следовательно, G_a сохраняет плоскость ∂K_a, так что всякая плоскость $Q \| \partial K_a$ переходит в плоскость $g(Q) \| \partial K_a$. Поэтому, если $x \in Q \cap \partial P_a$, $y \in Q \cap \partial P_a$ и $g(x) = y$, то $g(Q) = Q$. Стало быть, на $Q \cap \partial P_a$ действует аффинная транзитивная группа, так что $Q \cap \partial P_a$ — эллипсоид. Поэтому в подходящих координатах ∂P_a представляется уравнением $x_0 = f(r)$. По транзитивности группы, действующей на ∂P_a, $f(\lambda r) = h(\lambda) f(r)$, откуда $f(r) = cr^p$, и так как ∂P_a имеет острие (касается C_a), то $p < 1$. Теорема 2 доказана.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Д. Александров*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, АН СССР, т. 78, 3 (1972). [2] *А. Д. Александров*, ДАН, т. 189, № 4 (1969). [3] *А. Д. Александров*, ДАН, т. 191, № 3 (1970). [4] *Л. С. Понтрягин*, Непрерывные группы, 1963. [5] *R. Ellis*, Duke Math. J., v. 24, 119 (1957).