Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 531 *МЕХАНИКА*

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, М. Д. ГЕНКИН,
Г. В. КРЕЙНИН, В. И. СЕРГЕЕВ, Р. Б. СТАТНИКОВ

ПОИСК КОМПРОМИССНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ МАШИН

Поиск оптимальных параметров $\mathbf{x}=\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ машин часто не удается представить в виде традиционной задачи определения экстремума некоторой функции (критерия) качества $\Phi(\mathbf{x})$, что объясняется рядом причин; рассмотрим основные из них.

1. Вместо единственного обобщенного критерия $\Phi(\mathbf{x})$ проектировщик, как правило, располагает несколькими противоречивыми показателями $\Phi_1(\mathbf{x}), \Phi_2(\mathbf{x}), \ldots, \Phi_k(\mathbf{x})$, отражающими неполноту его представлений о возможностях машин, особенно на первых этапах проектирования. Чтобы перейти к $\Phi(\mathbf{x})$, пользуются, например, соотношением $\Phi=\sum_{v=1}^{k} p_v\Phi_v$, $v=1, 2, \ldots, k$, где p_v — назначаемые проектировщиком весовые коэффициенты (функции). При отсутствии обоснованных рекомендаций по выбору p_v такой переход достаточно условен: получив модель $\mathbf{x}_0^{\text{extr}}$, соответствующую $\operatorname{extr}\Phi$ при данных p_{v0}, проектировщик обычно устанавливает, что по некоторым из Φ_v модель его не устраивает. Тогда он задается новым набором p_{v1}, снова находит $\mathbf{x}_1^{\text{extr}}$ и т. д., если из-за противоречивости предъявляемых к машине требований окончательное решение возможно лишь на основе компромисса между Φ_v.

2. Другой путь — отказаться от многокритериальной задачи и перейти к однокритериальной, выбрав один из критериев $\Phi^*(x)$ в качестве главного и рассматривая остальные как ограничения $S(\mathbf{x})=\{s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x}) \ldots s_w(\mathbf{x})\}$ (задача математического программирования). Но в этом случае $\operatorname{extr}\Phi^*$ ищется в ограниченной («рабочей») области пространства параметров, которая может быть несвязной и невыпуклой. Поиск глобального $\operatorname{extr}\Phi^*$ здесь достаточно сложен, тем более, что предварительная информация о сложности рельефа поверхности $\Phi^*(\mathbf{x})$ отсутствует. Кроме того возникает проблема выбора $S(\mathbf{x})$ (границ, отделяющих рабочую область от запретной), аналогичная выбору p_v: при переходе к другим ограничениям меняется результат поиска.

3. В ходе расчета неизбежно совершенствуется постановка задачи, меняется представление о компромиссе по мере накопления информации о возможностях проектируемой машины, в соответствии с которыми ослабляются одни требования и усиливаются другие.

Представленный ниже метод выбора оптимальных параметров машин, построенный с учетом замечаний по пп. 1—3, основывается на исследовании пространств параметров путем равномерного заполнения его точками $\mathbf{x}_j$, $j=1, 2, \ldots, N$, по всему объему. Это является естественным в условиях, когда проектировщик не может заранее отдать предпочтение какой-либо части пространства. В каждой из $\mathbf{x}_j$ вычисляются все Φ_v $v=1, 2, \ldots$ $\ldots, k$: эта информация используется далее для определения понятия «оптимальная модель» и ее выбора, т. е. процедуры совершенствования постановки задачи и поиска оптимального решения объединяются в единый процесс.

Среди известных равномерно распределенных последовательностей (Вейля, Соболя, Холтона и др.) наилучшей в смысле оценок по степени равномерности является последовательность Соболя $Q_i=(q_{i,1}, \ldots, q_{i,n})$,

$0<q_{i,j}<1$ ([1]). Многомерные точки $\mathbf{x}_j=\{x_{1,j}\ldots x_{nj}\}$ последовательности находятся по соотношениям $x_{i,j}=x_i^*+q_{i,j}(x_i^{**}-x_i^*)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, N$, где x_i^{**}, x_i^* — соответственно верхняя и нижняя граница варьирования i-го параметра, N — число пробных точек равномерно распределенной последовательности $\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_N$.

Обозначим через V_G объем n-мерного параллелепипеда G, который равен $V_G=\prod_{i=1}^{n}(x^{**}-x_i^*)$. Если внутри G выделить два достаточно больших объема V_1 и V_2, то выполняется соотношение

$$V_1/V_2\approx N_1/N_2, \tag{1}$$

где N_1 и N_2 — количество точек, лежащих соответственно внутри V_1 и V_2. Полагая $V_1=V_G'$, $V_2=V_G$, $N_1=N'$, $N_2=N$, где V_G' — часть объема V_G, равная объему рабочей области, N' — число рабочих точек, запишем (1) в виде

$$\gamma=V_G'/V_G\approx N'/N. \tag{2}$$

Коэффициент $0\leqslant\gamma\leqslant1$ показывает, какая часть параллелепипеда G свободна от ограничений, причем возможны следующие ситуации:

А) $\gamma=0$, рабочие точки (модели) отсутствуют. Требуется изменить постановку задачи — проверить корректность условий, ослабить ограничения, увеличить G за счет x_i^{**} и x_i^* и т. п.

Б) $0<\gamma\leqslant\gamma^*$, где γ^* относительно невелико; имеются единичные рабочие точки. Можно воспользоваться рекомендациями по п. А) или перейти к новым $G'\subset G$, расположенным в окрестностях рабочих точек.

В) $\gamma=1$ или $\gamma^{**}\leqslant\gamma<1$, где γ^{**} относительно велико; практически все точки являются рабочими. Целесообразно проверить возможность усилить ограничения или расширить G, увеличив диапазон варьирования параметров.

Г) $\gamma^*\leqslant\gamma\leqslant\gamma^{**}$ — соотношение, показывающее, что выбранные x_i^*, x_i^* и $S(\mathbf{x})$ взаимно увязаны между собой.

Этим заканчивается первый этап, который направлен на уточнение постановки задачи. При вычислении γ можно ограничиться относительно малым числом точек $N_\gamma<N$; по нашим данным удовлетворительные результаты были получены при $N=32-64$*, $\gamma^*=0{,}1-0{,}2$, $\gamma^{**}=0{,}8-0{,}9$ (для $n\leqslant10$). Заметим также, что на первых этапах следует учитывать лишь безусловно необходимые ограничения, чтобы исключить из рассмотрения только те модели, которые в принципе неприемлемы (например, неработоспособны): $S(\mathbf{x})=\{s_1(\mathbf{x}),\ldots,s_l(\mathbf{x})\}$, $l\geqslant w$. Все остальные показатели задаются как критерии $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$.

Второй этап — заполнение параллелепипеда G точками с целью получения исходных данных для выбора оптимальной модели. Результатом этого этапа являются N моделей, характеризуемых каждая $\mathbf{x}_j$, $\Phi_1^j, \ldots, \Phi_k^j$, $j=1, 2\ldots, N$. Выбор N определяется из условия достаточно плотного заполнения точками пространства параметров; признаком его выполнения служит, в частности, относительно медленное улучшение показателей Φ_v с увеличением N. Как показывает опыт, подобное «насыщение» наступает (для $\gamma^*\geqslant0{,}2$) при $N\geqslant256-512$, если только решаемая задача не имеет особенностей, из-за которых область хороших решений сильно сужена. В таких случаях можно рекомендовать: 1) последовательно переходить в окрестности точек, где получены наилучшие результаты, постепенно уточняя границы x_i^{**}, x_i^*; 2) результаты исследования пространства параметров дополнить данными, полученными обращением к локальным методам оптимизации, методам теории оптимального управления и др.; 3) использовать для сужения пространства поиска дополнительную информацию, полученную путем исследования упрощенных зависимостей или приближенных решений.

* При вычислении $\mathbf{x}_j$ по $q_{i,j}$ целесообразно выбирать $N=2^m$, где m — целое число ([1]).

Для перехода к третьему этапу — выбору из $N'<N$ рабочих моделей оптимальной — введем два вида дополняющих одна другую сравнительных оценок, обозначаемых соответственно $\lambda_v^{j'}$ и $\Lambda^{j'}$. Оценки $\lambda_v^{j'}$ характеризуют модели с точки зрения их близости к наилучшему результату по каждому критерию (принимаем, что все критерии желательно минимизировать). Для вычисления $\lambda_v^{j'}$ пользуемся выражением

$$\lambda_v^{j'}=\Phi_v^{j'} \min_{(N')} \Phi_v,$$

где $\min\limits_{(N')} \Phi_v$ — наименьшее значение Φ_v из всех полученных при вычислениях; оно относится к одной из N' моделей, которая характеризуется $\lambda_v^{j'}=\lambda_{v\,\min}=1$. Очевидно, одна и та же модель в общем случае не является наилучшей по всем показателям Φ_v; поэтому в целях поиска компромиссного варианта должен быть установлен «допуск» на отклонение $\Phi_v^{j'}$ от $\min\limits_{(N')} \Phi_v$ (или $\lambda_v^{j'}$ от 1), называемый далее критериальным ограничением и обозначаемый $\Delta\lambda_v$. Полагаем, что все модели, удовлетворяющие условию

$$1 \leqslant \lambda_v^{j'} \leqslant 1+\Delta\lambda_v, \qquad (3)$$

являются равноценными; приоритет того или иного показателя Φ_v учитывается величиной $\Delta\lambda_v$: чем важнее показатель, тем меньше $\Delta\lambda_v$ и в частном случае возможно $\Delta\lambda_v=0$. Выбор $\Delta\lambda_v$ зависит от особенностей решаемой задачи и выполняется в несколько приемов с постепенным уменьшением «допуска».

Следует указать на принципиальное различие между критериальными ($\Delta\lambda_v$) и функциональными ($S(\mathrm{x})$) ограничениями. Первые вводятся на основе информации, получаемой из анализа N' моделей; поэтому они всегда отражают реальные возможности проектируемой машины и если эти возможности признаны недостаточными, то изменяется постановка задачи. Функциональные ограничения базируются на пожеланиях и интуиции проектировщика и, будучи введенными в расчет, могут с самого начала сделать задачу в принципе неразрешимой (предъявленные к машине требования превысят ее возможности).

В качестве примера в табл. 1 приводится часть сведений, полученных при расчете одной из схем редуктора; показатели $\lambda_v^{j'}$, $v=1,\ldots,5$, характеризуют динамические усилия в узлах редуктора, вызывающие шум. С целью максимального снижения его уровня все λ_v желательно минимизировать. Подробные сведения о расчетной схеме приводятся в ([2]); данные получены при $N=80$, $N'=32$ ($\gamma=0{,}4$); в каждой клетке таблицы верхнее число означает номер модели, нижнее — λ_v^{j}; модели в строках располагаются в порядке ухудшения одного из показателей λ_v (соответствующего номеру строки), что облегчает выбор $\Delta\lambda_v$.

Критерий $\Lambda^{j'}$ используется как интегральная сравнительная оценка моделей, удовлетворяющих условию (3); величина $\Lambda^{j'}$ определяется согласно

$$\Lambda^{j'}=\sum_{v=1}^{k} \lambda_v^{j'}.$$

Множество $\{\Lambda^{j'}\}$ всегда имеет точную нижнюю границу $\Lambda^{\min}=\sum\limits_{v=1}^{k}\lambda_{\min}=k$; такую оценку имела бы модель, у которой все критерии минимальны; очевидно, из-за частичной антагонистичности критериев должно быть $\Lambda^{j'}>k$. Назовем оптимальной из множества моделей, удовлетворяющих условию (3), такую модель, для которой имеет место $\min \Lambda^{j'}$.

Часть моделей, имеющихся в табл. 1, представлена в табл. 2, где они упорядочены относительно $\Lambda^{j'}$ — расположены в порядке его увеличения. Если принятые проектировщиком $\Delta\lambda_v$ таковы, что крайняя левая модель табл. 2 ($\mathbf{x}^{68}$) им удовлетворяет, то эта модель должна быть признана наилучшей. При $\Delta\lambda_4=0{,}22$, как видно из табл. 1, условию (3) удовлетворяют модели $\mathbf{x}^{18}$, $\mathbf{x}^{21}$, $\mathbf{x}^{7}$, $\mathbf{x}^{36}$ и $\mathbf{x}^{54}$; из них лучшей является $\mathbf{x}^{36}$, так как $\Lambda^{36}=\min\Lambda=25{,}0$. При $\Delta\lambda_4=0{,}2$ и $\Delta\lambda_5=0{,}38$ условию (3) удовлетворяют модели $\mathbf{x}^{18}$, $\mathbf{x}^{21}$; из них выбираем x^{18}, так как $\Lambda^{18}<\Lambda^{21}$ и т. д.

Таблица 1

λ_1	$\frac{80}{1}$	$\frac{8}{1,10}$	$\frac{48}{1,14}$	$\frac{72}{1,38}$	$\frac{68}{2,03}$	$\frac{20}{2,17}$	$\frac{36}{2,55}$	$\frac{12}{3,94}$	$\frac{34}{4,00}$	$\frac{42}{4,60}$	…
λ_2	$\frac{34}{1}$	$\frac{68}{1.12}$	$\frac{80}{2.27}$	$\frac{20}{2,42}$	$\frac{15}{2,66}$	$\frac{54}{3,35}$	$\frac{10}{3,80}$	$\frac{48}{5,58}$	$\frac{12}{8,55}$	$\frac{6}{8,55}$	…
λ_3	$\frac{68}{1}$	$\frac{80}{1}$	$\frac{20}{1,41}$	$\frac{34}{1,62}$	$\frac{48}{2,02}$	$\frac{10}{3,29}$	$\frac{12}{3.82}$	$\frac{72}{3,84}$	$\frac{6}{5,05}$	$\frac{36}{5,15}$	…
λ_4	$\frac{18}{1}$	$\frac{21}{1,10}$	$\frac{7}{1,14}$	$\frac{36}{1,15}$	$\frac{54}{1,15}$	$\frac{68}{1,25}$	$\frac{80}{1,25}$	$\frac{12}{1,25}$	$\frac{1}{1,30}$	$\frac{10}{1,37}$	…
λ_5	$\frac{78}{1}$	$\frac{18}{1,17}$	$\frac{8}{1,22}$	$\frac{15}{1,22}$	$\frac{43}{1,32}$	$\frac{21}{1,36}$	$\frac{73}{1,41}$	$\frac{7}{1,42}$	$\frac{36}{1,42}$	$\frac{54}{1,42}$	…

Таблица 2

$\Lambda^{j'}$	6,89	7,01	9,77	9,88	12,0	16,7	19,2	20,4	25,0
$\mathbf{x}^{j'}$	68	80	20	34	48	10	12	72	36
λ_1	2,02	1,00	2,18	4,00	1,15	6,65	3,94	1,38	2,56
λ_2	1,12	2,26	2,42	1,00	5,56	3,80	8,55	11,4	14,7
λ_3	1,00	1,00	1,43	1,61	2,02	3,30	3,80	3,82	5,15
λ_4	1,25	1,25	1,57	1,44	1,40	1,37	1,25	1,57	1,15
λ_5	1,50	1,50	2,17	1,83	1,83	1,62	1,62	2,22	1,42

$\Lambda^{j'}$	25,2	26,9	29,6	46,8	61,8	74,4	76,7	76,9	. . .
$\mathbf{x}^{j'}$	6	18	54	8	1	73	21	15	. . .
λ_1	7,75	8,85	17,1	1,10	21,2	17,7	26,8	53,2	. . .
λ_2	8,57	10,0	3,35	41,7	23,8	37,2	29,7	2,66	. . .
λ_3	5,05	5,90	6,55	12,6	13,9	16,7	17,7	18,2	. . .
λ_4	1,61	1,00	1,15	1,53	1,30	1,41	1,10	1,61	. . .
λ_5	2,22	1,16	1,42	1,21	1,62	1,41	1,36	1,21	. . .

С помощью табл. 1 и 2 можно показать, насколько зависит от выбора ограничений конечный результат. Например, если вместо $\Delta\lambda_4=0{,}22$ принять $\Delta\lambda_4=0{,}26$ и вместо $\Delta\lambda_5=0{,}38$ принять $\Delta\lambda_5=0{,}51$, то оптимальной будет модель $\mathbf{x}^{68}$, характеризуемая $\Lambda^{68}=6{,}89$, в то время как в первом случае ($\mathbf{x}^{\mathrm{opt}}=\mathbf{x}^{18}$) было $\Lambda^{18}=26{,}9$ (в данном случае $\Lambda^{\min}=5$).

Если требуется выбирать не только параметры, но и структурную схему машины (одну из нескольких вариантов схем), то описанный выше алгоритм последовательно применяется к каждой из структур, после чего все модели рассматриваются совместно с добавлением оценок сложности схем.

К задаче типа изложенных сводится и так называемая задача идентификации — выбора вида уравнений и численных значений входящих в них коэффициентов, при которых поведение рассматриваемой модели хорошо согласуется, например, с результатами экспериментов. Тот же алгоритм применим и при замене исходных расчетных зависимостей простыми (меньшей размерности, с меньшим числом членов) из условия обеспечения требуемой точности вычислений заданных характеристик.

Государственный научно-исследовательский
институт машиноведения
Москва

Поступило
14 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. М. Соболь*, Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, «Наука». 1969. [2] *В. К. Гринкевич*, Сборн. Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми зацеплениями, «Наука», 1971.