

Б. В. ЖЕЛЕЗНЫЙ
К ГИДРОДИНАМИКЕ НАСТУПАЮЩЕГО МЕНИСКА
СМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Фрумкинм 3 VI 1974)

Стационарное течение под действием капиллярных сил в пологой пленке вблизи отступающего и наступающего мениска смачивающей жидкости в плоском * капилляре полуширины R_c описывается уравнением (¹⁻⁴):

$$y'''' = d^2 y / dx^2 = (y-1) / y^3, \quad (1)$$

где $y = h/h_*$; $x = (3\eta v / \sigma)^{1/2} l / h_*$; h_* — толщина плоской пленки вдали от мениска; h — текущее значение толщины пленки при текущем значении координаты l , отсчитываемой вдоль стенки в направлении от мениска (система координат привязана к мениску); v — скорость мениска относительно стенки; σ — поверхностное натяжение жидкости; η — коэффициент вязкости. При выводе (1) принимается, в частности, что жидкость в пленке — ньютоновская, справедливо условие прилипания жидкости к стенке и условие пологости: $dh/dl \ll 1$. Последнее позволяет использовать линейное приближение задачи и просто определить радиус кривизны R_l поверхности пленки:

$$1/R_l = d^2 h / dl^2. \quad (2)$$

В рассматриваемом здесь случае наступающего мениска предполагается, что пленка перед мениском образована заранее каким-либо образом, так что h_* и v — независимые величины. Граничные условия при решении (1) в этом случае имеют вид:

$$y \rightarrow 1; \quad y' \rightarrow 0; \quad y'' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Аналитическое решение (1) не известно, потому оно решается на ЭВМ с использованием для начального участка интегральной кривой аналитического решения уравнения:

$$z'''' = z, \quad (4)$$

в которое переходит (1) при $y \rightarrow 1$ после замены: $z = y - 1$. При граничных условиях (3) решение (4) имеет вид (³): $z = \alpha \exp(-x/2) \cos(\sqrt{3}x/2)$, где α — произвольный параметр. Изменение α в $\exp(2\pi/\sqrt{3})$ раз приводит к повторению формы интегральной кривой $y(x)$, являющейся частным решением уравнения (1), со сдвигом этой кривой вдоль оси x . Поскольку выбор начала координат по x в данной задаче произволен, для рассмотрения всего семейства решений уравнений (4) и (1) достаточно рассмотреть решения в интервале $\alpha = 1 - 37,623$.

На рис. 1 представлена одна из рассчитанных на ЭВМ интегральных кривых. Перед мениском бежит затухающая волна, имеющая максимальную высоту C_3 . Из (1) следует: $y'''' \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, т. е. $y'' \rightarrow \text{const} = C_{1\infty}$. Таким образом, при $y \rightarrow \infty$ каждая интегральная кривая совпадает с некоторой «предельной параболой», описываемой уравнением $y'' = C_{1\infty}$. Если при толщинах, когда практически достигается $C_{1\infty}$, еще справедливо условие пологости, то радиус кривизны поверхности пленки R_l , соответствующий $C_{1\infty}$, можно приравнять постоянному радиусу кривизны R_m центральной части мениска. R_m определяет капиллярное давление и «эффективный» краевой угол движущегося мениска, а потому представляет практический

* Обычно та же теория без изменений приложима и к цилиндрическому капилляру радиуса R_c , что в дальнейшем будет иметься в виду.

интерес. На основании (2) и определения переменных имеем

$$h./R_m = C_{1\infty} (3\nu\eta/\sigma)^{2/3}. \quad (5)$$

Целью настоящей работы является определение отношения R_c/R_m (обозначим его ξ) как функции $h.$ и ν в рамках линейного приближения, использованного при выводе (1). В этом приближении предельной параболой соответствует профиль мениска постоянной кривизны $K_m = 1/R_m$. Обо-

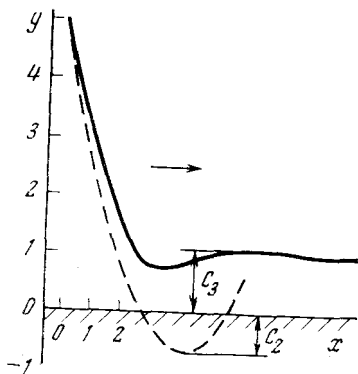


Рис. 1

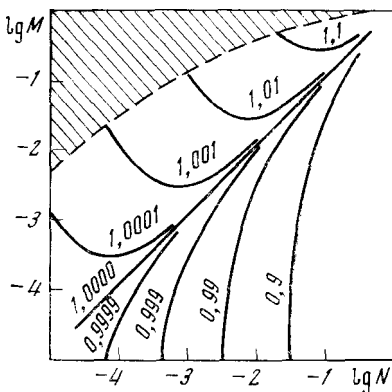


Рис. 2

Рис. 1. Частное решение уравнения (1) при условиях (3) и $\alpha=2$ (сплошная линия). Пунктир — «предельная» парабола. C_3 — максимальная высота волны перед мениском. Стрелкой показано направление движения мениска относительно стенки капилляра (заштрихована). Слева указан масштаб по x

Рис. 2. Зависимость $\xi(M, N)$ по (8) и (9). Цифры при изокосинусных кривых обозначают соответствующие ξ , заштрихована область образования «вторичных» столбиков перед мениском

значим ординату вершины предельной параболы $C_{2\infty}$. Поскольку уровень $y=0$ соответствует стенке капилляра, справедливо

$$R_c = R_m + C_{2\infty} h.. \quad (6)$$

Обозначим: $M = h./R_c$, $N = (3\nu\eta/\sigma)^{2/3}$, $C_\infty = C_{1\infty} C_{2\infty}$. Коэффициенты $C_{1\infty}$ и $C_{2\infty}$ являются однозначными функциями параметра α , а потому $C_\infty = \varphi(C_{1\infty})$. Из (5) и (6) следует:

$$M = C_{1\infty} N / [1 + \varphi(C_{1\infty}) N], \quad (7)$$

$$\xi = R_c/R_m = 1 + C_\infty N = 1 + \varphi(C_{1\infty}) N. \quad (8)$$

Если зависимость $\varphi(C_{1\infty})$ известна, то решив (7) относительно $C_{1\infty}$ при заданных значениях независимых переменных M и N , по (8) можно найти ξ . Отметим, что знаменатель правой части (7) равен ξ . Найденные в результате численного интегрирования (1) при различных α значения коэффициентов $C_{1\infty}$, $C_{2\infty}$, C_∞ и C_3 приведены в табл. 1. В интервале $C_{1\infty} = 10^{-4} - 10$ функцию $\varphi(C_{1\infty})$ можно аппроксимировать формулой:

$$C_\infty = \varphi(C_{1\infty}) = 51,2 / (4,85 - \lg C_{1\infty}) - 10,4. \quad (9)$$

По определению ξ тождественно $\cos \theta$, где θ — эффективный динамический краевой угол. Из вида функции $\varphi(C_{1\infty})$ следует, что для наступающего мениска возможно как $\xi < 1$, так и $\xi \geq 1$. Система (7) — (8) была решена для различных M и N . Общий характер зависимости $\xi(M, N)$ виден из рис. 2, на котором представлены «изокосинусные» кривые ($\xi = \text{const}$). Вся область изменения M и N делится прямой $M = 1,135N$ на две части, соответствующие $\xi < 1$ и $\xi > 1$. При $\xi > 1$ имеет место сложная зависимость ξ от N и наблюдается выраженный процесс волнообразования. Заштрихованная область соответствует перекрестию ближайших к мениску «главных» волн, возникающих на противоположных стенках капилляра. В этой области перед мениском образуются «вторичные» столбики жидкости. Такое явление наблюдалось экспериментально для толстых пленок и малых скоростей.

Результаты численного интегрирования (1) при различных α

α	$C_{1\infty}$	$C_{2\infty}$	C_∞	C_3	α	$C_{1\infty}$	$C_{2\infty}$	C_∞	C_3
1	233	0,058	13,4	16,4	1,2	0,6940	-18,8	-1,77	1,036
1,1	723	0,030	21,7	567	1,5	0,321	-3,22	-1,04	1,048
*	$7,78 \cdot 10^{-5}$	$-6,08 \cdot 10^4$	-4,73	1,035	2,657	1,168	-0,039	-0,043	1,082
	$2,28 \cdot 10^{-4}$	$-1,94 \cdot 10^4$	-4,43	1,035	5	3,039	0,346	1,05	1,168
	$5,22 \cdot 10^{-4}$	-7890	-4,14	1,035	9	8,012	0,311	2,49	1,384
1,105	0,00192	-1900	-3,65	1,035	17	26,6	0,186	4,94	2,08
1,11	0,00730	-405	-2,95	1,035	26,57	72,9	0,111	8,10	3,54
1,125	0,0239	-106	-2,53	1,035					

* Отмечена область малой устойчивости решения в районе $\alpha = 1,103-1,104$.

При $C_{1\infty} \rightarrow 0$ (в районе $\alpha = 1,103$) функция $\xi(C_{1\infty})$, по-видимому, имеет предел C_0 , величину которого трудно установить при численном интегрировании ввиду малой устойчивости решения в этой области. При $\varphi(C_{1\infty}) \rightarrow C_0$ формула (8) переходит в

$$\xi = \cos \theta = 1 + C_0 N, \quad (10)$$

где C_0 — константа, не зависящая от M и N . Ориентировочно $C_0 \approx -10$. Формула (10) в первом приближении описывает движение по сухой поверхности. При малых N формула (10) тождественна выражению: $\operatorname{tg} \theta = 2,35\sqrt{N}$ полученному Фрицем⁽³⁾, но с другим числовым коэффициентом.

Использование в (8) и (7) коэффициентов $C_{1\infty}$ и C_∞ вполне оправдано, если кривая $y(x)$, являющаяся частным решением (1), практически достигает формы предельной параболы при таких значениях y , когда еще справедливо условие пологости:

$$y' \ll 1/\sqrt{N}. \quad (11)$$

С другой стороны, физический смысл имеют лишь значения y , удовлетворяющие условию:

$$y \ll 1/M. \quad (12)$$

Условие (11) включает в себя (12) и поэтому является более сильным ограничением теории. При $C_{1\infty} \rightarrow 0$ сближение кривой $y(x)$ с предельной параболой с ростом y происходит медленно, и практически совпасть они могут при таких y , когда оба условия (11) и (12) будут нарушены. Точное значение ξ в этом случае можно найти лишь при решении соответствующей двухмерной или трехмерной задачи. В рамках линейного приближения можно улучшить согласие с опытом, несколько видоизменив теорию.

Ограничимся более слабым условием (12), приняв, что линейное приближение справедливо при всех y вплоть до уровня $y_m = 1/M$, соответствующего центру каниллера*. Кривизне K_m центральной части мениска соответствует значение $y_m'' = C_1$ на этом уровне, а профилю мениска постоянной кривизны K_m соответствует парабола, имеющая в точке y_m ту же кривизну и наклон, что и интегральная кривая. Ордината вершины этой параболы C_2 находится из формулы: $C_2 = y_m - (y_m')^2 / 2y_m''$, где индекс m означает, что значения функции $y(x)$ и ее производных берутся в точке y_m интегральной кривой. Заметим, что $C_{2\infty}$ находится как предел C_2 при $y_m \rightarrow \infty$. Определенные таким образом C_1 и C_2 используются вместо $C_{1\infty}$ и $C_{2\infty}$ для нахождения ξ . Однако в этом случае взаимосвязь между C_1 и C_2 оказывается более сложной. При достаточно малых M и N можно использовать асимптотические зависимости, удовлетворяющие, как можно показать, уравнению (1) при $y \rightarrow \infty$: $C_1 = C_{1\infty} + \sqrt{2}/(3y\sqrt{C_{1\infty}y})$; $C_2 = C_{2\infty} +$

* Основанием для такого допущения является то, что основное изменение кривизны при переходе от пленки к мениску все же происходит в области пологости, определяемой соотношением (11); некоторое дополнительное изменение кривизны, происходящее вне этой области, хотя и не описывается формулой (1), но имеет тот же знак и характер, так что при малых N ошибка от использования (1) во всей области $y \ll 1/M$ невелика.

Составление экспериментальных и теоретических значений ξ

R_c , мкм	M	N	ξ			
			экспер.	вычислено по (15)	вычислено по (3)	вычислено по (4)
97	0,00165	0,069	0,85	0,850	0,850	0,348
97	0,00632	0,0673	0,91	0,904	0,853	0,828
97	0,0226	0,0720	0,97	0,950	0,842	0,976
97	0,00323	0,172	0,65	0,660	0,716	0,186
97	0,0122	0,162	0,78	0,768	0,727	0,578
97	0,0430	0,182	0,91	0,888	0,706	0,911
97	0,00172	0,174	0,60	0,575	0,711	0,091
97	0,0150	0,0890	0,90	0,911	0,819	0,915
412	0,0194	0,305	0,68	0,624	0,610	0,420
412	0,00705	0,362	0,63	0,288	0,577	0,092
53	0,00177	0,0530	0,92	0,892	0,879	0,508
53	0,0080	0,0513	0,95	0,941	0,883	0,941
53	0,0168	0,0574	0,95	0,960	0,872	0,981
53	0,0236	0,103	0,93	0,930	0,790	0,958

$+ \sqrt{2}(C_{1\infty} \sqrt{C_{1\infty} y})$ и вытекающую из них:

$$C = C_1 C_2 = C_\infty + \sqrt{2/C_{1\infty} y}. \quad (13)$$

Из сравнения последних выражений видно, что предельное значение $C_{1\infty}$ с ростом y достигается гораздо быстрее, чем $C_{2\infty}$ и C_∞ . Поэтому главная коррекция при замене $C_{1\infty}$ и C_∞ в (7) и (8) на C_1 и C связана с последней величиной, и обычно можно положить $C_1 \approx C_{1\infty}$. Учитывая это, при ξ , близких к 1, на основании (7) можно принять:

$$C_1 \approx C_{1\infty} \approx M/N. \quad (14)$$

С учетом (14) формула (13) при $y=1/M$ переходит в $C=C_\infty + \sqrt{2N}$. Подставляя последнее выражение вместо C_∞ в (8) и используя (9) и (14), получаем для ξ вблизи 1:

$$\xi = 1 + [51,2/(4,85 - \lg M/N) - 10,4 + \sqrt{2N}]N. \quad (15)$$

В табл. 2 полученные ранее (3) экспериментальные данные для наступающего мениска глицерина ($\eta=14$ пз., $\sigma=62$ дн/см), движущегося по созданной заранее смачивающей пленке в кварцевом капилляре, сопоставлены с расчетом по формуле (15), формуле Фрица и формуле, полученной в (4): $\lg \theta = 0,25N^{3/2}/M$. Абсолютная ошибка определения ξ по киноснямкам как отношения R_c/R_m в большинстве опытов не превышает 0,02. Как видно из данных табл. 2, при малых N формула (15) согласуется с опытом в пределах его погрешности. Отклонения при больших N связаны с условием (11). Расхождение теории с опытом возможно также при очень малых h_* , когда может сказаться специфика тонких пленок; при больших R_c необходимо учитывать силу тяжести.

Настоящая теория приложима также к отступающему мениску смачивающей жидкости. Краевые условия при интегрировании (1) в этом случае имеют вид: $y \rightarrow 1$; $y' \rightarrow 0$; $y'' \rightarrow 0$; при $x \rightarrow -\infty$. При этих условиях численное интегрирование (1) дает единственную пару значений: $C_{1\infty} = 0,643$; $C_{2\infty} = 2,88$. Поэтому (7) переходит в однозначную зависимость M от N : $M = 0,643N/(1+1,85N)$, что при $N \ll 1$ дает известную формулу (1, 2): $M = 0,643N$, а при $N \gg 1$ определяет предельную толщину h_{\max} остающейся за отступающим мениском пленки: $h_{\max} \approx 0,35R_c$.

Агрофизический научно-исследовательский институт
Ленинград

Поступило
20 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

L. Landau, V. Levich, Acta phys.-chim. URSS, v. 17, 42 (1942). ² Б. В. Дерягин, ЖЭТФ, т. 15, 9 (1945). ³ G. Fritz, Zs. angew. Phys., v. 19, 374 (1965). ⁴ V. Ludviksson, E. N. Lightfoot, Am. Inst. Chem. Eng. J., v. 14, 674 (1968). ⁵ Б. В. Железный, ДАН, т. 207, 647 (1972).