**Доклады Академии наук СССР**
1974. Том 218, № 2

УДК 513.833 — *МАТЕМАТИКА*

А. В. ЧЕРНАВСКИЙ

# СТЯГИВАЕМЫЕ ОКРЕСТНОСТИ В ГРУППЕ ГОМЕОМОРФИЗМОВ МНОГООБРАЗИЯ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 II 1974)*

Цель этой заметки — дать эскиз доказательства результата, уточняющего теорему о локальной стягиваемости группы гомеоморфизмов топологического метризуемого многообразия ([1]). Именно, мы покажем, что при $n\geqslant 5$ имеются сколь угодно малые (в мажорантной топологии) стягиваемые окрестности. Вопрос о существовании таких окрестностей возник сразу после ([1]), но особый интерес к нему возбудил Д. Хендерсон, который свел к нему доказательство того, что группа гомеоморфизмов является бесконечномерным многообразием.

Изучение локальных свойств группы гомеоморфизмов метризуемого многообразия удобно проводить в два этапа. Сначала это изучение сводится к локальному случаю пространства вложений куба в $R^n$, а затем изучается этот случай. Первый шаг был уже описан в литературе несколько раз и вполне ясен, поэтому мы не будем касаться его здесь. Второй шаг мы опишем с достаточной полнотой.

Мы предполагаем, что читатель хорошо знаком с ([1]), а также с техникой леммы о поглощении, см. Замечание 2 ниже.

2. Введем некоторые обозначения. Пусть $I_a^n$ — куб в $R^n$: $\{x;\ |x_i|\leqslant a,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$, $I_1^n=I^n$; $R_{ia}$, $1\leqslant i\leqslant n$, — гиперплоскость в $R^n$: $\{x;\ x_i=a\}$; $H_{ia}^\varepsilon$, $1\leqslant i\leqslant n$, — слой в $R^n$: $\{x;\ a-\varepsilon\leqslant x_i\leqslant a+\varepsilon\}$; $C(a,\ i,\ b)$ — сечение куба $I_a^n$; в частности, если $b=\pm a$, то это грани куба $I_a^n$, обозначаемые соответственно $C_{ia}^\pm$, и если $a=1$, то $C_i^\pm$.

Через $\mathfrak{H}_\varepsilon$ обозначим пространство вложений $h$ куба $I_2^n$ в $R^n$, для которых $h(C_{i2}^\pm)\subset H^\varepsilon_{i,\pm 2}$ соответственно и $h(C_i^\pm)\subset H^\varepsilon_{i,\pm 1}$.

Наш основной результат — это

Теорема. *Если $M$ — топологическое метризуемое многообразие, размерность которого $n\geqslant 5$, то в любой окрестности тождества в группе гомеоморфизмов $M$, рассматриваемой в мажорантной топологии, содержится стягиваемая по себе в точку окрестность.*

Все необходимые определения см в ([1]).

Мы дадим здесь набросок доказательства следующего результата.

Теорема 1. *Если $n\geqslant 5$ и если $\varepsilon<1/2$, то $\mathfrak{H}_\varepsilon$ стягивается по себе в подпространство вложений, тождественных на $I^n$.*

Замечание 1. На самом деле для построения стягиваемой окрестности группы гомеоморфизмов многообразия требуется более сильное утверждение, а именно, следующее уточнение теоремы 1.

Обозначим через $\mathfrak{H}_\varepsilon(k)$ подпространство вложений, тождественных на $\partial I^k\times I_2^{n-k}$, где $I^k$ и $I_2^{n-k}$ — декартовы сомножители $I^n$ и $I_2^n$, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях. Требуется, чтобы при указанном в формулировке теоремы стягивании $\mathfrak{H}_\varepsilon(k)$ деформировалось по себе. Однако доказательство сравнительно несложно модифицировать так, чтобы получить это уточнение (ср. ([1]), стр. 342).

Замечание 2. Ограничение $n\geqslant 5$ возникает только из-за применения известного средства для построения изотопий — леммы о поглощении. Как обычно, для применения этой леммы в новой ситуации приходится применять ее новую модификацию. На этот раз нам придется применить ее в непрерывной зависимости от параметра (где пространство параметров — это $\mathfrak{H}_\varepsilon$).

3. Эскиз доказательства теоремы 1. Обозначим через $K_k$ «решетку» куба $I^n$, состоящую из всех сечений $C(1, i, b)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $b$ пробегает числа $j/2^k$, $2^{-k} \leqslant j \leqslant 2^k$, и пусть $\varepsilon_k$ — достаточно быстро стремящаяся к нулю монотонно убывающая последовательность чисел, $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Обозначим через $\mathfrak{H}_{k\varepsilon}$ подпространство $\mathfrak{H}_\varepsilon$, состоящее из всех вложений $h$: $1_2{}^n \to R^n$, для которых $h(C(1, i, b)) \subset H_{i,b}^{\varepsilon_k}$ ($\mathfrak{H}_{1\varepsilon} = \mathfrak{H}_\varepsilon$), где $C(1, i, b)$ — сечения решетки $K_k$. Мы докажем теорему, показав, что $\mathfrak{H}_{k\varepsilon_k}$ стягивается по себе в $\mathfrak{H}_{k+1\,\varepsilon_{k+1}}$. Это стягивание состоит из двух шагов. Во-первых, мы сжимаем каждую полосу $H_{i,b}^{\varepsilon_k}$ до $H_{i,b}^{\varepsilon_{k+1}}$ (ср. (¹), стр. 347, п. 6), при этом $\mathfrak{H}_{k\varepsilon_k}$ переходит в $\mathfrak{H}_{k\varepsilon_{k+1}}$. Затем мы деформируем $\mathfrak{H}_{k\varepsilon_{k+1}}$ в $\mathfrak{H}_{k+1\,\varepsilon_{k+1}}$.

Построение этой деформации состоит в том, что мы последовательно присоединяем к $K_k$ сечения $C(1, i, b)$ решетки $K_{k+1}$, не входившие в $K_k$, и деформируем $\mathfrak{H}_{k\varepsilon_k}$ по себе в подпространство вложений $h$, для которых $h(C(1, i, b)) \subset H_{i,b}^{\varepsilon_{k+1}}$ для всех добавленных $C(1, i, b)$. Таким образом, нам достаточно рассмотреть следующий элементарный шаг.

Пусть $C_a = C(1, i, a)$ и $C_b = C(1, i, b)$ — два соседних сечения из $K_k$ и $C = C(1, i, c)$ — равноудаленное от них параллельное сечение из $K_{k+1}$. По условию, мы рассматриваем вложения $I_2{}^n$ в $R^n$, которые переводят $C_a$ и $C_b$ в $\varepsilon_{k+1}$-полосы вокруг них — $H_a$ и $H_b$ соответственно; кроме того, сечения $C_\alpha$ из $K_k$ и добавленные к $K_k$ на предыдущих шагах сечения из $K_{k+1}$ также переводятся в свои $\varepsilon_{k+1}$-полосы. Для каждого $h$: $I_2{}^n \longrightarrow R^n$ с такими свойствами мы должны построить изотопию $e_t$: $R^n \longrightarrow R^n$, непрерывно зависящую от $h$, которая была бы неподвижна на $h(C_a) \cup h(C_b) \cup h(\partial I_2{}^n)$, причем в каждый момент $t$ выполнялись бы перечисленные выше условия (с заменой $h$ на $e_t h$) и $e_1 h(C) \subset H$, где $H$ — полоса шириной $2\varepsilon_{k+1}$ вокруг $C$.

Изотопия $e_t$ строится в два приема. Вначале строится изотопия $e_t' = h\sigma_t h^{-1}$, где $\sigma_t$ — изотопия, смещающая $C$ параллельно настолько близко к $C_a$, чтобы $e_1' h(C)$ лежало в $H_a$. Как показано в (¹), стр. 335, такую изотопию нетрудно построить в непрерывной зависимости от $h$. Будем считать, что уже с самого начала $h(C)$ лежит в $H_a$.

Теперь будем строить $e_t$ с помощью леммы о поглощении. Это было бы просто сделать, если бы не требовалось непрерывной зависимости от $h$ всех построений.

Прежде всего нам понадобится система триангуляций, непрерывно зависящая от $t$. Пусть $T_\alpha$ — система триангуляций $R^n$, где $0 < \alpha < 1$, причем для некоторой счетной последовательности чисел $r_i$, монотонно стремящейся к нулю, $0 < r_i < 1$, все триангуляции $T_\alpha$, $r_{i+1} \leqslant \alpha < r_i$, изоморфны и получаются однократным звездным подразделением из $T_{r_i}$ с центром в точке некоторого симплекса из $T_{r_i}$, которая непрерывно перемещается по симплексу к его барицентру от какой-либо вершины, когда $\alpha$ изменяется от $r_i$ до $r_{i+1}$. Таким образом, при $\alpha < r_i$ триангуляция $T_\alpha$ является подразделением $T_{r_i}$. Требуется, чтобы при $\alpha \to 0$ максимальный диаметр симплексов, пересекающих $I_2{}^n \cup h(I_2{}^n)$, стремился к нулю.

В таком случае для каждого $h$ мы можем найти столь малое $\alpha$, что если следующие ниже построения леммы о поглощении проводить, отправляясь от $T_\alpha$, то для результирующей изотопии все гомеоморфизмы будут лежать в $\mathfrak{H}_{k\,\varepsilon_{k+1}}$, а $e_1 h(C) \subset H_{ic}^{\varepsilon_{k+1}}$. Более того, для данного $h$ можно взять и любую триангуляцию $T_{\alpha'}$, где $\alpha' < \alpha$. С другой стороны, одна и та же триангуляция $T_\alpha$ может быть использована для построения изотопии для всех вложений из некоторой окрестности $h$ в пространстве

$\mathfrak{H}_{k\ \varepsilon_{k+1}}$. Построим для этого покрытия пространства $\mathfrak{H}_{k\ \varepsilon_{k+1}}$, используя его метризуемость, локально-конечное вписанное покрытие $\{V_l\}$ и разбиение единицы $\{\varphi_l\}$, подчиненное покрытию $\{V_l\}$. Заменим константу $\alpha_l$, отвечающую $V_l$, на функцию $\alpha_l\cdot\varphi_l$. Тогда $a(h)=\sum_l \alpha_l\varphi_l(h)$ есть непрерывная функция, в каждой точке $h$ меньшая максимального значения $\alpha_l$ для тех $V_l$, которые содержат $h$. Поэтому $T_{\alpha(h)}$ можно взять для $h$.

Мы строим далее две гомотопии $\theta'$ и $\theta''$, которые должны служить для направления поглощений ([2]). Построение этих гомотопий является основным моментом всего рассуждения.

Построим вначале ретракцию $fI_2^n$ на его часть, лежащую слева от сечения $C(2,\ i,\ c+\varepsilon_{k+1}/2)$, которая переводит пересечения $I_2^n$ с прямыми, параллельными оси $Ox_i$, в себя.

Пусть $\bar{\chi}_t$ — изотопия, непрерывно зависящая от $h$, которая равномерно параллельно самому себе смещает сечение $C'$, очень близкое к $C$, в сечение $C''$, очень близкое к $C_b$, тождественно вне области между $C$ и $C_b$ и которая переводит пересечения $I_2^n$ с прямыми, параллельными оси $Ox_i$, в себя. Положим $\chi_t=h\bar{\chi}_{u(t)}h^{-1}$, где $u(t)$ — функция, монотонно возрастающая от нуля до единицы, причем очень быстро вблизи нуля. Степень близости $C'$ к $C$ и $C''$ к $C_b$ и скорость возрастания $u(t)$ определяются последующими построениями. Ясно, что $\chi_t$ должно непрерывно зависеть от $h$.

Пусть еще $\psi_t$ — изотопия, смещающая сечение $C(2,\ i,\ a+\delta)$ параллельно себе в $C(2,\ i,\ b-\delta)$, где $\delta>0$ — очень малое число, непрерывно зависящее от $h$, оставляющая неподвижной $C(2,\ i,\ a)$ и $C(2,\ i,\ b)$ и линейная на смежных интервалах.

В качестве $\theta_t''$ возьмем гомотопию $f\circ(h\psi_t h^{-1})\circ\chi_t$, а в качестве $\theta_t''$ — $f\circ(h\psi_t^{-1}h^{-1})$. Обе гомотопии рассматриваются на области между $h(C_a)$ и $C(2,\ i,\ c+\varepsilon_{k+1}/2)$. Ясно, что обе они непрерывно зависят от $h$ и в любой момент времени переводят образы сечений из $K_k$ и добавленных на предыдущих шагах сечений из $K_{k+1}$ в свои $\varepsilon_{k+1}$-полосы.

Далее мы, как обычно, строим двойственные комплексы $P$ и $P^*$. $P$ состоит из всех симплексов, покрывающих окрестность $h(C_a)$, и еще из $(n-3)$-мерных симплексов, а $P^*$ — из всех симплексов, покрывающих окрестность $C$, и еще из двумерных звезд двойственного комплекса. Мы не уточняем здесь поведение этих комплексов на границе $hI_2^n$ и также способ выбора этих комплексов «в непрерывной зависимости» от $h$.

После этого обычным образом строятся поглощающие изотопии $e_t'$ и $e_t''$ и «промежуточная изотопия» $\bar{e}_t$ так, что $\bar{e}e_1'(h(A))\cup e_1''(B)$ содержит всю область между $h(C_a)$ и $C(2,\ i,\ c+\varepsilon_{k+1})$. Здесь $A$ есть область между $h(C_a)$ и $C$, а $B$ — между $C$ и $C(2,\ i,\ c+\varepsilon_{k+1})$. Тогда $e''^{-1}_t\bar{e}_t e_t'$ — требуемая изотопия.

При построении нужно заботиться о том, чтобы все отображения, приведения в общее положение и т. п. зависели непрерывным образом от $h$, что сравнительно несложно, хотя и требует достаточно кропотливой работы, которую мы здесь опускаем.

Автор очень благодарен С. В. Матвееву за обсуждение этой статьи и за ряд полезных замечаний.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[2] *А. В. Чернавский*, Матем. сборн., т. 79, 307 (1969). [2] *R. H. Bing*, Conf. Topology of Manifolds, 1967, 1968, p. 1.