Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 2

УДК 519.95 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР С. В. ЯБЛОНСКИЙ

СТРОЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ОКРЕСТНОСТИ ДЛЯ ПРЕДИКАТНО-ОПИСУЕМЫХ КЛАССОВ В P_k

При изучении замкнутых классов в P_k важную роль играет знание структуры (по включению) замкнутых классов. Здесь класс $\mathfrak{M}'$ предшествует классу $\mathfrak{M}''$, если $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}''$. Если $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}''$, то $\mathfrak{M}'$ называется подклассом класса $\mathfrak{M}''$, а $\mathfrak{M}''$ — надклассом класса $\mathfrak{M}'$.

Для $k=2$ эта структура построена и полностью изучена Постом ([1]). При $k\geqslant 3$ структура изучена слабо, что, возможно, связано с тем, что она содержит континуум элементов (а не счетное множество, как при $k=2$). Для $k\geqslant 3$ имеется ряд результатов, дающих некоторую информацию о строении упомянутой структуры. Здесь мы упомянем некоторые из них. Следующие три утверждения эквивалентны ([2]).

I. *Замкнутый класс $\mathfrak{M}$ не содержит строго возрастающих цепочек замкнутых классов с пределом, равным $\mathfrak{M}$.*

II. *В $\mathfrak{M}$ каждый замкнутый класс, который отличен от $\mathfrak{M}$, может быть расширен до предполного класса (максимального подкласса) и число предполных классов конечно.*

III. *$\mathfrak{M}$ имеет конечный базис.*

Здесь существенную роль играет результат о том, что если замкнутый класс $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис, то он имеет конечное число предполных классов (обобщение теоремы Кузнецова).

Обратное утверждение неверно: класс может иметь конечное число предполных классов и не иметь конечного базиса. Например, класс Янова ([3]) не имеет предполных классов и не имеет базиса. Если к этому классу добавить тождественную функцию $\varphi(x)=x$, то получим класс с одним предполным классом и также без базиса.

Данные результаты касаются строения нижней окрестности замкнутого класса $\mathfrak{M}$ с конечным базисом, т. е. окрестности $\mathfrak{M}$ в структуре, состоящей из подклассов класса $\mathfrak{M}$. Естественно поставить вопрос о том, что можно сказать о строении верхней окрестности замкнутого класса $\mathfrak{M}$, т. е. окрестности $\mathfrak{M}$ в структуре, состоящей из надклассов класса $\mathfrak{M}$. Этот вопрос полностью решается для случая, когда $\mathfrak{M}$ предикатно-описуем.

Функция $P(y_1, \ldots, y_m)$ из P_k, принимающая значения из $[0,1]$, называется предикатом, а число m — местностью предикатов.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k сохраняет предикат $P(y_1, \ldots, y_m)$, если для любой системы наборов $\{(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)\}$, $i=1, \ldots, m$, такой что $P(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^m)=\ldots=P(\alpha_n^1, \ldots, \alpha_n^m)=1$ имеет место

$$P(f(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, f(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m))=1.$$

Легко видеть, что множество $[P]$ всех функций из P_k, сохраняющих предикат $P(y_1, \ldots, y_m)$, является замкнутым классом.

Определение. Замкнутый класс, который является классом сохранения некоторого предиката $P(y_1, \ldots, y_m)$, называется предикатно-описуемым классом.

Известно, что уже в P_2 встречаются классы, которые не описываются при помощи предикатов (Кузнецов). Для P_k, $k\geqslant 3$, предикатно-описуемые классы встречаются так же часто, как и классы, имеющие конечный базис. Оба эти семейства образуют всюду плотные множества в структуре замкнутых классов.

В интересующих нас вопросах существенную роль играет понятие инвариантного класса ([4]). Именно здесь мы рассмотрим некоторую его модификацию.

Определение. Множество $\mathfrak{M}$ из P_k называется инвариантным классом, если:

1) Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{M}$ и любой подстановки переменных $\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \end{pmatrix}$ функция $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

2) Для любой функции f из $\mathfrak{M}$ классу $\mathfrak{M}$ принадлежат все функции, получающиеся из $\mathfrak{M}$ путем добавления и изъятия несущественных переменных.

Очевидно, что любой замкнутый класс $\mathfrak{M}$ является инвариантным (обратное утверждение неверно).

Определение. Функция g из P_k называется порождающим элементом для инвариантного класса $\mathfrak{M}$, если

1) $g \notin \mathfrak{M}$,

2) при любом отождествлении переменных мы получаем из g функцию, принадлежащую $\mathfrak{M}$.

Для каждого инвариантного класса $\mathfrak{M}$ можно построить систему, состоящую из всех порождающих элементов. Из него выберем подсистему

$$g_1, \quad g_2, \ldots,$$

содержащую из каждого множества эквивалентных порождающих элементов (функций, переводящихся одна в другую путем подстановки переменных, не содержащей отождествлений) по одному представителю. Такие системы будем называть приведенными.

Пусть g — произвольный порождающий элемент для $\mathfrak{M}$; обозначим через Π_g множество всех функций h из P_k таких, что для каждой h можно указать подстановку переменных, при которой h переходит в g. Множество Π_g называется пучком, порожденным g. Ясно, что

$$\Pi_g \subseteq C\mathfrak{M}, \quad \mathfrak{M} = C \bigcup_i \Pi_{g_i},$$

где сумма берется по приведенной системе порождающих элементов.

Обозначим через $\mathfrak{M}^l$ множество всех функций из класса $\mathfrak{M}$, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_l$, и через P^l — предикат с k^l, местами принимающий значение 1 на наборах, являющихся столбцами значений функций из $\mathfrak{M}^l$.

Теорема. *Класс $\mathfrak{M}$ предикатно-описуем тогда и только тогда, если $\mathfrak{M}$ замкнут, содержит тождественные функции вида $\varphi(x) = x$ и его приведенная система порождающих элементов конечна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M} = [P(y_1, \ldots, y_m)]$. Очевидно, что $\mathfrak{M}$ замкнут и содержит функции вида $\varphi(x) = x$. Возьмем $h(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathfrak{M}$. Для нее существуют наборы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m \end{pmatrix}$$

такие, что $P(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^m) = \ldots = P(\alpha_n^1, \ldots, \alpha_n^m) = 1$, а

$$P(L(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, h(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m)) = 0.$$

Данная матрица имеет $s' \leqslant s \leqslant k^m$ различных столбцов, где s — число наборов, на которых $P=1$. Если произвести отождествление переменных у функции h в соответствии с разбиением столбцов на классы эквивалентности, то получим функцию $h'(x_1, \ldots, x_s)$. Функция h' сохраняет предикат P (что обнаруживается на соответствующей системе наборов). Отсюда следует, что порождающие элементы для $\mathfrak{M}$ зависят не более чем от s переменных, поэтому приведенная система порождающих элементов конечна.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутый класс, содержащий функции вида $\varphi(x)=x$ и имеющий конечную приведенную систему порождающих элементов. Обозначим через s_0 максимальный порядок порождающих элементов и рассмотрим все функции, зависящие от переменных $x_1, \ldots, x_{s_0}$ из $\mathfrak{M}$. Каждая из них определяется таблицей

x_1,	$\ldots$,	x_{s_0}	f
0,	$\ldots$,	0	γ_1
.	.	.	$\ldots$
$k-1$,	$\ldots$,	$k-1$	γ_m

или набором $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, где $m=k^{s_0}$. Определим предикат $P(y_1, \ldots, y_m)$:

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)=\begin{cases} 1, & \text{если } (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \text{ соответствует функции из } \mathfrak{M}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Так как $\mathfrak{M}$ содержит функции вида $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{s_0})=x_i$, $i=1, \ldots, s_0$, то столбцы из левой части таблицы удовлетворяют предикату P, поэтому функция $f(x_1, \ldots, x_{s_0})$ удовлетворяет предикату P тогда и только тогда, когда $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ удовлетворяет предикату P, т. е. принадлежит $\mathfrak{M}$. Очевидно, что $[P]\supseteq\mathfrak{M}$. С другой стороны, если $h\notin\mathfrak{M}$, то из нее путем отождествлений переменных и, быть может, введением несущественных переменных может быть получена функция $h'(x_1, \ldots, x_{s_0})$ и $h'\notin\mathfrak{M}$. Очевидно, h' не сохраняет P и потому h также не сохраняет P. Следовательно, $\mathfrak{M}=[P]$. Теорема доказана.

Основная теорема. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

I. *Замкнутый класс $\mathfrak{M}$ содержит тождественную функцию и не имеет строго убывающих цепочек замкнутых надклассов с пределом, равным $\mathfrak{M}$.*

II. *Класс $\mathfrak{M}$ имеет конечное число минимальных надклассов и каждый надкласс класса $\mathfrak{M}$ содержит минимальный надкласс класса $\mathfrak{M}$.*

III. *$\mathfrak{M}$ предикатно-описуем.*

Доказательство. Доказательство ведем по схеме I$\to$III$\to$II$\to$I.

1) I$\to$III. Пусть выполнено I. Для класса $\mathfrak{M}$ рассмотрим предикаты $P^1, P^2, \ldots$ Очевидно, $[P^1]\supseteq[P^2]\supseteq\ldots$ и $\lim\,[P^i]=\mathfrak{M}$.

Из I вытекает, что данная цепочка надклассов стабилизируется, т. е. найдется такое t, что

$$[P^t]=[P^{t+1}]=\ldots=\mathfrak{M}.$$

Очевидно, $\mathfrak{M}$ описывается предикатом P^t.

2) III$\to$II. Пусть выполнено III. Из предыдущей теоремы следует, что $\mathfrak{M}$ имеет конечную приведенную систему порождающих элементов

$$g_1, \quad g_2, \ldots, g_q.$$

Рассмотрим надклассы $[\mathfrak{M}\cup\{g_1\}], \ldots, [\mathfrak{M}\cup\{g_q\}]$ и выберем из них минимальные. Если $\mathfrak{L}$ — произвольный подкласс класса $\mathfrak{M}$, $h\in\mathfrak{L}\setminus\mathfrak{M}$ и $h\in\Pi_{i}$, то, $\mathfrak{L}\supseteq[\mathfrak{M}\cup\{g_i\}]$ и потому содержит некоторый минимальный подкласс. Все минимальные подклассы класса $\mathfrak{M}$ исчерпываются построенными и их число конечно.

3) II$\to$I. Пусть выполнено II. Предположим, что

$$\mathfrak{L}_1\supset\mathfrak{L}_2\supset\ldots$$

строго убывающая цепочка надклассов класса $\mathfrak{M}$ и сходящаяся к $\mathfrak{M}$. Из II следует, что каждое $\mathfrak{L}_i$ содержит некоторый из минимальных надклассов. В силу их конечности, по крайней мере, один из них будет содержаться в бесконечном числе членов последовательности, а из-за ее монотонности — во всех членах непоследовательности. Но тогда $\lim \mathfrak{L}_i \neq \neq \mathfrak{M}$, откуда вытекает I.

Теорема доказана.

Итак, для верхней окрестности класса $\mathfrak{M}$ имеют место результаты, аналогичные результатам для нижней окрестности, при этом свойство предикатной описуемости для нее играет такую же роль, как свойство конечности базиса для нижней окрестности.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
7 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Post*, Two-valued Iterative Systems, 1941. [2] *С. В. Яблонский*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 1, 5 (1958). [3] *Ю. И. Янов, А. А. Мучник*, ДАН, т. 127, № 1, 44 (1959). [4] *С. В. Яблонский*, УМН, т. 12, 189 (1957).