Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 6

УДК 517.11:(51.01+519.48) МАТЕМАТИКА

И. С. НЕГРУ

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СОВОКУПНОСТИ ЛОГИК ВЫСКАЗЫВАНИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 12 IV 1974)

Исчисление высказываний чаще всего формулируют так, что понятие формулы в нем то же, что и в хорошо известном интуиционистском исчислении высказываний. А именно, формулы при этом строятся обычным образом, исходя из счетного запаса пропозициональных переменных, с помощью двуместных операций & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция) и $\supset$ (импликация), одноместной операции $\urcorner$ (отрицание) и скобок. Такие формулы называем обыкновенными формулами. Одним из важнейших и наиболее употребительных в логических исчислениях правил вывода является modus ponens; не менее важным является также и правило подстановки. Чтобы исследовать в более чистом виде разнообразие возможностей, доставляемых этими двумя правилами, естественно, в частности, не фиксировать заранее никаких аксиом, одних и тех же раз и навсегда, а рассмотреть всевозможные логики, удовлетворяющие этим правилам. При этом, поскольку понятие формулы фиксировано, часто бывает удобным отождествлять (ту или иную) логику с некоторым множеством формул (верных в ней, т. е. выводимых, общезначимых или иначе выделяемых; см. ([5б])) и рассматривать совокупность логик как множество таких множеств формул, которые замкнуты относительно правил вывода. Однако, ради относительной простоты картины, иногда удобно варьировать понятие формулы, предельно его сузить, чтобы, обеднив тем самым совокупность логик, посмотреть, сколь сложной она все-таки остается.

Импликационной формулой называется такая обыкновенная формула, в которую не входят никакие знаки операций, отличные от $\supset$.

Примитивной формулой называем такую импликационную формулу, в которую из переменных входит лишь одна-единственная буква p, т. е. такую формулу, которая построена на основе алфавита

$$\supset\ (\ )\ p$$

([10в, г]). Результат подстановки в формулу A формулы B вместо p обозначаем символом AB (очевидно, что такое «умножение» ассоциативно, но не коммутативно; буква p играет роль «единицы»). Любое множество обыкновенных формул, замкнутое относительно подстановки и modus ponens, называем обыкновенной логикой высказываний или, сокращенно ОЛВ (([10б, в]); ср. с понятием обыкновенного исчисления высказываний, т. е. ОИВ ([5а])). Аналогично, любое множество примитивных (импликационных) формул, замкнутое относительное тех же правил *, называется примитивной логикой (собственно импликационной логикой).

Совокупность всех ОЛВ, совокупность всех импликационных логик и совокупность всех примитивных логик обозначаем соответственно буквами S, J и L. Каждая из этих трех совокупностей относительно включения является структурой (т. е. решеткой, латицей), причем структурными операциями в ней являются пересечение (пересечение логик a и b обознача-

* Правило подстановки сужается соответственно сужению понятия формулы.

ем ab) и замкнутое относительно modus ponens объединение $(a-b)$. Исследованная в ряде работ структура суперинтуиционистских логик (она содержит интуиционистскую логику, классическую, промежуточные между ними логики и абсолютно противоречивую логику; см ([13, 14, 16б, [illegible]], [15]) и др.) является подструктурой (и даже фильтром) структуры S. Известно, что подструктура эта * дистрибутивна ([14, 3а, б, 7]), имеет мощность континуума ([16а]), а также, что конечно аксиоматизируемые суперинтуиционистские логики составляют подструктуру этой подструктуры ([9, 14, 3а, 5]) (при этом ОЛВ называется **конечно аксиоматизируемой**, если она порождается некоторым конечным множеством формул, т. е. является наименьшей, содержащей его ОЛВ; аналогично определяем конечную аксиоматизируемость импликационных или примитивных логик, причем примитивную логику, порожденную формулами $B_1, \ldots, B_n$, обозначаем символом $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle$). Естественно возникал вопрос о том, что аналогичное можно сказать о свойствах структур S, J и L.

Нетрудно доказать, что структура L изоморфно вложима в структуру J, а последняя — в структуру S (за счет того, что каждой данной логике ставится в соответствие множество всех результатов подстановки в принадлежащие ей формулы, что изменяет ее лишь из-за расширения алфавита; см. ([10в]) **). Это позволяет многие свойства, доказанные для L, автоматически переносить на J и на S. Поэтому ниже рассматриваем лишь примитивные логики.

Было доказано в ([10в]), что L имеет мощность континуума, причем можно указать такую последовательность примитивных формул, что каждые две ее различные подпоследовательности порождают различные примитивные логики; пример — последовательность формул

$$\begin{gathered} ((p\supset p)\supset p), \\ ((((p\supset p)\supset p)\supset p)\supset p), \\ ((((((p\supset p)\supset p)\supset p)\supset p)\supset p)\supset p), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{1}$$

обозначаемых ниже соответственно $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (вообще формулу

$$(A_{i_1}\supset(A_{i_2}\supset(A_{i_3}\supset(\ldots\supset(A_{i_{n-2}}\supset(A_{i_{n-1}}\supset A_{i_n}))\ldots)))), \tag{2}$$

где $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ взяты из (1) и попарно различны, обозначаем ниже символом $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$).

Позже в ([10г]) было доказано то же самое о мощности каждого нетривиального идеала этой структуры ***, а также о мощности множества ее **коатомов** (т. е. максимальных из тех ее элементов, которые отличны от ее единицы, т. е. от $\langle p \rangle$). Кроме того было доказано ([10а, в]), что конечно аксиоматизируемые примитивные логики в L подструктуры не составляют; а именно, пересечение $\langle (p\supset p)\rangle$ $\langle (p\supset(p\supset p))\rangle$ конечно аксиоматизируемой логикой не является. Было также доказано ([10а, в]), что структура L не дистрибутивна и даже не дедекиндова. А именно, если $a=\langle A\rangle$, $b=\langle B\rangle$ и $c=\langle C\rangle$, где **** $A=(p\supset p)$, $B=AA$ и $C=(B\supset A)$, то логики a, b, c, bc и $a+c$ составляют в L пятиэлементную недедекиндову подструктуру; а если $a=\langle A\rangle$, $b=\langle B\rangle$ и $c=\langle CD\rangle$, где $A=(p\supset p)$, $B=((A\supset p)\supset p)$, $C=(p\supset A)$ и $D=(p\supset B)$, то логиками a, b и c в структуре L порождается (как образующими) бесконечная подструктура *****.

---

* Заметим, что она дуально изоморфна структуре всех многообразий псевдобулевых алгебр ([11, 3а, 6, 3б]).

** В ([10в]) доказано существование изоморфного вложения L в S, сохраняющего **ранг** логики, т. е. наименьшую мощность порождающего ее множества формул.

*** Вместо (1) использована последовательность $AC_1, AC_2, AC_3, \ldots$, где формула A принадлежит какой-нибудь логике из идеала, а C_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, отличается от A_i только тем, что самое левое вхождение переменной замещено формулой A.

**** Знак $=$ между формулами понимаем как знак их графического равенства.

***** Напомним ([1]), что дедекиндова структура с тремя образующими конечна.

После этого оставался еще открытым вопрос вообще о структурных тождествах (т. е. законах вида $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — структурные термы, т. е. термы, построенные обычным образом из переменных с помощью структурных операций) и квазитождествах (т. е. законах вида

$$(\mathfrak{A}_1=\mathfrak{B}_1 \Rightarrow (\mathfrak{A}_2=\mathfrak{B}_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\mathfrak{A}_n=\mathfrak{B}_n \Rightarrow \mathfrak{A}=\mathfrak{B})\ldots))), \tag{3}$$

где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — структурные термы). А именно вопрос о том, могут ли все же какие-нибудь нетривиальные из них (т. е. на всех структурах верные) быть верными на структуре L (в отличие от закона дистрибутивности и модулярного закона).

В ([10д]) была анонсирована теорема о том, что свободная структура со счетной системой образующих изоморфно вложима в структуру L. Отсюда следовало, что все нетривиальные структурные тождества на L не верны. Однако оставался вопрос о квазитождествах. При дальнейших попытках уточнить и обобщить теорему из ([10д]) обнаружена особая роль совокупности L' всех тех примитивных логик, каждая из которых порождается некоторым множеством формул вида (2).

Теорема 1. *Совокупность L' является подструктурой структуры L, причем всякая счетная структура изоморфно вложима в L'.*

Отсюда следовал ответ на вопрос о квазитождествах, поскольку любое нетривиальное квазитождество (3) опровергается уже на той не более чем счетной структуре, которая задается равенствами $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2=\mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n=\mathfrak{B}_n$ из (3) как определяющими соотношениями, если входящие в (3) переменные переосмыслить как образующие. Однако вставал вопрос, можно ли каждое такое квазитождество опровергнуть, если в качестве значений переменных пользоваться только конечно аксиоматизируемыми примитивными логиками. В связи с этим рассмотрим совокупность L'' всех конечно аксиоматизируемых логик из L'.

Теорема 2. *Совокупность L'' является подструктурой структуры L' и при том является локально-конечной структурой (т. е. всякая ее конечно-порожденная подструктура конечна).*

Любое подмножество E произвольной структуры *, рассматриваемое вместе с теми частичными операциями, которые получаются из операций этой структуры, когда рассматриваем их лишь на E и считаем определенными, если и только если результат принадлежит E, называем осколком этой структуры.

Теорема 3. *Всякий конечный осколок структуры изоморфно вложим в структуру L''.*

Рассматривая произвольное нетривиальное квазитождество (3), такую структуру, на которой оно не верно, такой набор взятых из нее значений переменных, при котором оно ложно, и тот ее осколок, который состоит из этих значений и значений всех термов $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и всех их подтермов, получаем

Основное следствие. *Всякое нетривиальное структурное квазитождество (в частности, тождество) опровергается уже на структуре L''.*

Из теорем 2 и 3 вытекает также следующее обобщение теоремы Сакса ([12]) о структурных тождествах: *всякое структурное квазитождество, верное на всех конечных структурах, верно на всех структурах* **.

При доказательстве сформулированных выше теорем использованы следующие понятия, касающиеся примитивных формул (иных формул ниже не рассматриваем). Формулу A, отличную от p, называем простой, если не существует таких формул B и C, одновременно отличных от p, что $A=BC$. Спектр логики a определяем как множество всех простых формул,

* Или вообще универсальной алгебры.

** Это предложение независимо доказал В. И. Игошин, письменно сообщивший об этом автору. Как заметил А. В. Кузнецов, оно эквивалентно следующему: всякая структура, заданная конечной системой определяющих соотношений, финитно аппроксимируема (в смысле ([8])), т. е. резидуально конечна (см. ([4])).

принадлежащих a. Выводом формулы A из формул $B_1, B_2, \ldots, B_n$, называемых гипотезами вывода, называем такую конечную последовательность формул, последний член которой есть A и каждый член которой является гипотезой или получается из ранее стоящих членов однократным применением правила подстановки или modus ponens. Говорим, что этот вывод неизбыточен, если все его гипотезы являются его членами и нет в нем ни одного такого члена, после выкидывания которого он остался бы все еще выводом формулы A из тех же гипотез.

Использованы следующие леммы: 1) для каждой (примитивной) формулы A существует единственное представление ее в виде $BC \ldots D$, где все «множители» — простые формулы; 2) всякая формула вида (2) простая; 3) к формулам $A_{i_1 i_2 \ldots i_m}B$ и $A_{j_1 j_2 \ldots j_n}C$ применим modus ponens (т. е. первая из них является посылкой второй) тогда и только тогда, когда $m=1$, $n>1$, $i_1=j_1$ и $B=C$; 4) если $B \in a \in L'$, то B имеет вид $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}C$, причем $A_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in a$; 5) если для формулы A вида (2) существует неизбыточный вывод ее из формул $B_1, \ldots, B_n$, принадлежащий некоторой логике из L', то $B_1, \ldots, B_n$ тоже вида (2) и существует вывод формулы A из них без использования правила подстановки; 6) спектр пересечения равен пересечению спектров; 7) всякая логика, принадлежащая L', порождается своим спектром; 8) если логика принадлежит L'', то ее спектр конечен.

Попутно получается новый алгоритм, решающий проблему тождества для структур. Основывается он на сопоставлении рассматриваемым термам и их подтермам логик из L'' и вычисления спектров этих логик.

Автор выражает благодарность А. В. Кузнецову за постановку задач, внимание к настоящей работе и ценные советы.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Получено
28 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. Биркгоф,* Теория структур, ИЛ, 1952. [2] *В. Я. Герчиу,* Матем. исследования, т. 5, в. 3, 24 (1970). [3] *В. Я. Герчиу, А. В. Кузнецов,* а) IX Всесоюзн. алгебраич. коллоквиум, резюме, Гомель, 1968, стр. 54; б) ДАН, т. 195, 1263 (1970). [4] *T. Evans,* J. London Math. Soc., v. 1. 399 (1969). [5] *А. В. Кузнецов,* а) Алгебра и логика, т. 2, в. 4, 47 (1963); б) Матем. исследования, т. 6, в. 4, 75 (1971). [6] *А. В. Кузнецов, В. Я. Герчиу,* ДАН, т. 195, 1029 (1970). [7] *Л. Л. Максимова,* Алгебра и логика, т. 9, 530 (1970). [8] *А. И. Мальцев,* Уч. зап. Ивановск. пед. инст., т. 18, 49 (1958). [9] *S. Miura,* Nagoya Math. J., v. 26, 167 (1966). [10] *И. С. Негру,* а) XI Всесоюзн. алгебраич. коллоквиум, резюме, Кишинев, 1971, стр. 262; б) II Всесоюзн. конфер. по матем. логике, тезисы, М., 1972, стр. 34; в) Матем. исследования, т. 7, в. 4, 174 (1972); г) там же, т. 8, в. 3, 161 (1973); д) XII Всесоюзн. алгебраич. коллоквиум, тезисы, т. 2, Свердловск, 1973, стр. 292. [11] *Е. Расева, Р. Сикорский,* Математика метаматематики, М., 1972. [12] *D. Sachs,* Proc. Am. Soc., v. 12, 944 (1961). [13] *T. Umezawa,* J. Symb. Lojic, v. 24, 20 (1959). [14] *T. Hosoi.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, v. 14, 293 (1967). [15] *T. Hosoi, H. Ono,* J. Tsuda College, v. 5, 67 (1973). [16] *В. А. Янков,* а) ДАН, т. 181, 33 (1968); б) Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, 1044 (1968).