

Академик А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

К ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

1. Настоящая статья служит продолжением (1). Мы рассматриваем переносимый (т. е. инвариантный относительно параллельных переносов) предпорядок в аффинном пространстве A . Он определяется множеством $P_a = \{y: y \geq a\}$ для какой-либо данной точки a ; предполагается $P_a \neq (a)$. Вообще мы полагаем $P_x = \{y: y \geq x\}$, $P_x^- = \{y: y \leq x\}$. Предполагается также следующее основное условие:

Р0. Множества $P_a \cap P_x^-$ ограничены.

При этом условии данный предпорядок есть порядок.

Пусть G_a — группа всех таких биекций $\bar{g}: A$ на A , что $\bar{g}(a) = a$ и при всякой $\alpha \in A$ $\bar{g}(P_\alpha) = P_{\bar{g}(\alpha)}$. В (1) были введены условия:

G1. При всяких x , $y \in \partial P_a$ существует такое $g \in G_a$, что $\bar{g}(x) = y$.

G2. То же для x , $y \in \hat{P}_a = P_a \setminus \partial P_a$.

Оба условия выполняются, если P_a — луч из a . Исключаем это условием

P1. P_a не луч.

В (1) была установлена

Теорема 1. При условиях G1, G2, P1 P_a есть либо замкнутый, либо открытый эллиптический конус, а G_a , если $\dim A > 2$, есть группа Лоренца с растяжениями (т. е. с добавлением гомотетий с центром a).

В (1) были установлены условия, которые могут заменить здесь G2, или G2 и P1. Теперь мы рассмотрим, что будет, если снять условие G1.

Заметим, во-первых, что условие G2 автоматически выполняется, если $\hat{P}_a \neq \emptyset$, но тогда оно ничего не значит. Поэтому, снимая G1, нужно обеспечить $\hat{P}_a \neq \emptyset$. Во-вторых, если выполнено G1 и есть хотя бы одна точка $x \in P_a \cap \partial P_a$, $x \neq a$, то $\partial P_a \subset P_a$, т. е. P_a замкнуто. Таким образом, при G1 либо P_a замкнуто, либо $P_a \setminus (a)$ открыто. Соответственно, снимая G1, вводим условие

P2. Либо $P_a \setminus (a)$ открыто, либо P_a замкнуто и $\hat{P}_a \neq \emptyset$.

Теорема 2. При условиях G2, P2 множество P_a представляет собой такой выпуклый конус, что существует группа его аффинных отображений на себя, транзитивная на его внутренности. С другой стороны, принимаемая любой такой конус за множество P_a , получим очевидно переносимый предпорядок с условием G2.

Однако группа G_a совпадает с указанной аффинной группой, если и только если \hat{P}_a не является декартовым произведением с лучом в качестве сомножителя (иначе она содержит неаффинные отображения, описанные в (1)).

Надо думать, в этой теореме из условия P2 достаточно только требовать $\hat{P}_a \neq \emptyset$. Конус с аффинной группой, транзитивной на его внутренности, не обязан быть либо замкнутым, либо открытым. Все такие открытые конусы найдены в (4).

2. Чтобы выделить в теореме 2 эллиптический конус и получить тем самым результат теоремы 1, введем условие

P3. При всякой $b \in \partial P_a$ множество $\partial P_a \cap \partial P_b^-$ содержится в прямой или линейно упорядоченно в предпорядке, задаваемом множеством \bar{P}_a .

Теорема 3. Если выполнены условия G2, P2, P3, то имеет место утверждение теоремы 1. При этом условие P2 можно заменить одним из двух следующих более слабых условий P4, G3.

P4. Если $P_a \cap \partial P_a \neq (a)$, то множество $P_a \cap \partial P_a$ не является линейно упорядоченным, или — другой вариант — не содержится в прямой.

G3. Группа G_a не сохраняет никакого линейно упорядоченного множества, или — другой вариант — никакого пересечения P_a с лучом, исходящим из a , не считая, в обоих случаях, множества, состоящего из одной точки a .

3. Теорема 3 опирается на следующую теорему, выясняющую смысл введенных условий и представляющую также самостоятельный интерес.

Образующая конуса называется *крайней*, если она не содержится в выпуклой оболочке остальных его образующих; для выпуклого конуса это равносильно тому, что она не лежит в угле между двумя другими образующими. Область крайних образующих — открытое множество на границе конуса, состоящее из крайних ее образующих за вычетом вершины (между прочим, это же будет область выступающих образующих, т. е. таких, которые не лежат в одной опорной плоскости с другими).

Теорема 4. *Если на конусе с аффинной группой, транзитивной внутри него, есть область крайних образующих, то конус эллиптический либо замкнутый, либо открытый, либо содержащий одну образующую своей границы.*

Связь с введенными условиями выясняется из следующих утверждений.

Лемма 1. *Если $b \in \partial P_a$, то $\partial P_a \cap \partial P_b^- = \bar{P}_a \cap \bar{P}_b^-$, т. е. это есть сегмент $[ab] = \{x: a \leq x \leq b\}$ в порядке, задаваемом \bar{P}_a .*

Лемма 2. *Если сегмент $P_a \cap P_b^-$ линейно упорядочен, то (благодаря P0) он содержится в прямой.*

Лемма 3. *Если P_a — конус, то сегмент $[a, b]$ линейно упорядочен или содержится в прямой, если и только если b лежит на крайней образующей, и тогда $[a, b]$ есть ее отрезок ab .*

Поэтому условие P3 в применении к конусу означает, что все образующие его границы крайние. Соединяя это замечание с теоремой 2 и используя теорему 4, получаем первую часть теоремы 3: при условиях G2, P2, P3 конус P_a эллиптический, замкнутый или открытый, а G_a , если $\dim A > 2$, группа Лоренца с гомотетиями. Третий случай в теореме 4, когда конус P_a не замкнутый и не открытый, исключен условием P2. Он также очевидно исключается каждым из условий P4, G3. Вообще же эти условия вместе с P3 влекут P2.

4. Доказательство теоремы 4. Теорема 4 равносильна следующей.

Теорема 4а. *Пусть ограниченное множество M допускает группу проективных отображений на себя, транзитивную на M .*

Тогда, если на ∂M есть область крайних точек, то M — эллипсоид либо замкнутый, либо открытый, либо содержащий одну единственную точку границы.

(Крайняя точка множества — та, которая не содержится в выпуклой оболочке его точек; если множество выпукло, это равносильно тому, что точка не содержится в отрезке, соединяющим какие-либо две другие точки множества. Область крайних точек является также областью выступающих точек.)

Проективную группу G_0 , сохраняющую M и транзитивную на M , можно считать замкнутой в полной проективной группе и тогда она есть группа Ли. Поэтому ∂M кусочно-регулярно, так что если на ∂M есть область крайних точек, то есть точки, где ∂M дважды дифференцируема и имеет положительную кривизну. Но в таком случае, как показано в (2), \bar{M} есть эллипсоид, откуда очевидно следует теорема 4а, а следовательно, и теорема 4.

5. Доказательство теоремы 2. 1) При условии P2 можно воспользоваться результатом, полученным в (3), и заключить, что отображения $g \in G_a$ непрерывны.

2) Если $b \in \dot{P}_a$ и c такова, что векторно $ac = 2ab$, то $c \in P_b \subset \dot{P}_a$. Поэтому, в силу G2, существует такое $\bar{g} \in G_a$, что $\bar{g}(c) = b$ и, вообще, $g^n(c) > g^{n+1}(c)$.

Благодаря P0 существуют точки $\bar{g}^n(c)$, $\bar{g}^m(c)$, сколь угодно близкие друг другу. Поэтому в $P_a \setminus (a)$ есть точки сколь угодно близкие к a .

3) Благодаря (1), (2) из доказанного в (4), следует: C_a — конус, образованный лучами из a , содержащимися в \bar{P}_a , сохраняется группой G_a (этот конус непуст (4)). Поэтому если $C_a \cap \dot{P}_a \neq \emptyset$, то при условии G2 окрывается $\dot{P}_a \subset C_a$ и P_a — конус.

4) Допустим $C_a \cap \dot{P}_a = \emptyset$, так что $C_a \subset \partial P_a$. Если точка $b \in \dot{P}_a$ достаточно близка к C_a (в сравнении с удалением ее от a), то $\bar{P}_a \cap \bar{P}_b$ — содержит связное множество, содержащее a и b . Если же $b \in \dot{P}_a$ удалена от C_a , то такого множества нет. Это противоречит G2 и непрерывности всех $g \in G_a$. Следовательно, $C_a \cap \dot{P}_a \neq \emptyset$ и по 3) \dot{P}_a — конус.

6. Доказательство теоремы 3. 1) Первая часть теоремы 3 — с условием P2 — следует из теорем 2, 4, как показано в п. 3. Докажем ее вторую часть — без P2. При этом условия P3, P4 мы возьмем в такой форме, что в них речь идет о множествах, линейно упорядоченных в порядке, задаваемом \bar{P}_a .

2) Допустим $\dot{P}_a = \emptyset$, так что $P_a \subset \partial P_a = \bar{P}_a$. Пусть $b, c \in \bar{P}_a$ и d таково, что векторно $ad = ab + ac$; тогда $b, c \in \bar{P}_a \cap \bar{P}_a$, так что по условию P3 точки b, c связаны отношением порядка, заданного \bar{P}_a . Следовательно, в этом порядке \bar{P}_a линейно упорядочено. Но так как $\bar{P}_a = \partial P_a \supset P_a$, то это противоречит P4. Следовательно, $\dot{P}_a \neq \emptyset$.

3) Если $b \in \dot{P}_a$ и $ac = 2ab$, то $[ac] = \bar{P}_a \cap \bar{P}_c$ — содержит окрестность b и потому, как можно убедиться, не будет линейно упорядоченным. Поэтому, в силу G2, все $[ab]$ с $b \in \dot{P}_a$ не являются линейно упорядоченными. Но по P3 и лемме 1 при $b \in \partial P_a$ $[ab]$ линейно упорядочено. Следовательно, $g(\dot{P}_a) = \dot{P}_a$ при всех $g \in G_a$ и мы можем перейти к порядку, задаваемому множеством $\dot{P}_a \cup (a)$. Но для него выполнено P2, и потому, ссылаясь на (1), получаем результат теоремы 3.

7. Физическая интерпретация. В пространстве-времени порядок определяется воздействием — передачей импульса-энергии от события в («мировой точке») x событию в y . Множество P_a замкнуто, ∂P_a образовано точками-событиями, до которых от вспышки в a доходит прямой (нерассеянный) свет. Линейная упорядоченность множества $\partial P_a \cap \partial P_b$ означает, что свет от a к b проходит единственным путем. Условия же G2 можно рассматривать как выражение эквивалентности инерциальных движений. Таким образом, наша теорема 3 означает, что из принципа Галилея и единственности «пути» прямого света следует равенство скоростей света во всех направлениях и, вообще, принцип постоянства скорости света.

8. В (4) мы нашли все порядки с условием G1 и такие, что $a \in \overline{P_a \setminus (a)}$. Теперь укажем остальные порядки с G1 (с одним дополнительным условием).

Теорема 5. Пусть $P_a = (a) \cup Q_a$, где $a \notin \bar{Q}_a$, и кроме того P_a содержится в конусе с острой вершиной. В таком случае P_a задает порядок с условием G1 тогда и только тогда, когда Q_a — множество, выделяемое из некоторого конуса K_a с аффинной группой, транзитивной внутри него, плоскостями, отсекающими от K_a постоянный объем. При этом группа G_a является унимодулярной подгруппой этой аффинной группы.

Простейший случай, когда ∂Q_a — полость гиперболоида и G_a — группа Лоренца. Доказательство использует один результат А. К. Гуца.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Д. Александров, ДАН, 219, № 1 (1974). ² А. Д. Александров, ДАН, т. 189, № 4 (1969). ³ А. Д. Александров, ДАН, т. 191, № 3 (1970). ⁴ А. Д. Александров, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 78, 3 (1972). ⁵ Э. Б. Винберг, Тр. Московск. матем. общ., т. 12 (1963).