

Член-корреспондент АН СССР А. С. АЛЕКСЕЕВ, А. Г. МЕГРАБОВ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТРУНЫ С УСЛОВИЕМ НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ

Известные (⁵, ⁶, ⁸) обратные задачи об определении механических свойств струны по движению отдельных точек относятся к случаю, когда на концах струны (занимающей конечный или полубесконечный интервал оси z) заданы граничные условия вида

$$\left(\beta \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha u \right) \Big|_{z=\text{const}} = f(t), \quad -\infty < \alpha, \beta < \infty. \quad (1)$$

Они непосредственно связаны с обратной задачей Штурма — Лиувилля (³⁻⁷), поскольку уравнению струны и таким граничным условиям соответствует самосопряженный одномерный дифференциальный оператор с вещественными постоянными коэффициентами в краевых условиях.

В данной заметке рассматриваются обратные задачи об определении переменных коэффициентов в гиперболическом уравнении колебаний струны

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \eta(z) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \eta(z) > 0, \quad \mu(z) > 0, \quad (2)$$

как полуограниченной, так и конечной, на одном конце которой задано граничное условие наклонной производной

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \kappa \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_{z=0} = f(\xi), \quad \kappa > 0, \quad f(\xi) |_{\xi < 0} = 0, \quad (3)$$

означающее, что на этот конец, помимо вынуждающей силы, действует сила, пропорциональная скорости его движения.

Существенное отличие от струны с условиями вида (1) при этом состоит в том, что соответствующий одномерный оператор оказывается (при $\kappa \neq 0$) несамосопряженным — с комплексным и притом переменным коэффициентом в краевом условии. Тем не менее удастся привести все рассматриваемые обратные задачи к известным обратным задачам для самосопряженного оператора Штурма — Лиувилля с помощью некоторого специального приема. В случае конечной струны он состоит в следующем. Сначала нашей одной несамосопряженной дифференциальной системе сопоставляются некоторые две самосопряженные регулярные задачи Штурма — Лиувилля. Затем, используя найденное представление решения краевой (прямой) задачи (при его обосновании существенно применяется теорема 3.7.1 из работы М. А. Наймарка (⁸)), по данным наших обратных задач определяем спектры этих двух задач. В итоге удастся привести все обратные задачи для конечной струны к задаче определения регулярного оператора Штурма — Лиувилля по двум спектрам (³, ⁷), а все задачи для полуограниченной струны (используя формулу для спектральной функции из (⁴)) — к задаче определения оператора Штурма — Лиувилля на полуоси по спектральной (⁴, ⁷) или главной переходной (⁶) функции.

Прямая задача 1. Найти функцию $u(z, \xi)$, удовлетворяющую в области $z > 0$, $-\infty < \xi < \infty$ уравнению (2), при $z=0$, $-\infty < \xi < \infty$ — условию

(3), начальному условию $u|_{\xi=0} = 0$ ($z \geq 0$) и условиям: одна из функций u_z , $u_{\xi} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ равномерно относительно ξ в любом конечном интервале, а другая ограничена при $z \geq 0$, $\xi \geq 0$; функции u , u_{ξ} непрерывны при $z \geq 0$, $-\infty < \xi < \infty$, а u_{zz} , $u_{\xi\xi}$, $u_{z\xi}$ — при $z \geq 0$, $\xi \geq 0$. Функции η , μ , $d\mu/dz$ непрерывны при $0 \leq z < \infty$.

Прямая задача 2. Найти функцию $u(z, \xi)$, удовлетворяющую в области $0 < z < H$ ($-\infty < \xi < \infty$) уравнению (2), при $z=0$, $-\infty < \xi < \infty$ — условию (3), при $z=H$, $-\infty < \xi < \infty$ — условию $\partial u / \partial z|_{z=H} = 0$, начальному условию $u|_{\xi=0} = 0$ ($0 \leq z \leq H$) и условиям: функции u , u_{ξ} непрерывны при $0 \leq z \leq H$, $-\infty < \xi < \infty$, а u_{zz} , $u_{\xi\xi}$, $u_{z\xi}$ — при $0 \leq z \leq H$, $\xi \geq 0$. Функции η , μ , $d\mu/dz$ непрерывны при $0 \leq z \leq H$.

Положим

$$\bar{v}^2(z) = \mu(z)/\eta(z), \quad \sigma(z) = \bar{v}(z)/\mu(z), \quad f(\xi) = d\varphi/d\xi (\varphi(0) = 0),$$

где функция \bar{v} положительна, и перейдем к переменным

$$x = \int_0^z dz/\bar{v}(z), \quad \sigma(x) = \sigma(z).$$

Обратные задачи 1 и 2. При $0 \leq \xi < \infty$ заданы: в обратной задаче 1 — функция $f(\xi)/\kappa$ и значения $u(0, \xi)$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи 1 с неизвестными функциями $\eta(z)$, $\mu(z)$, $0 \leq z < \infty$, и неизвестным числом κ , задано также число $\kappa\mu(0)$; в обратной задаче 2 — значения $u(0, \xi)$ и $\partial u / \partial z|_{z=0}$ решения прямой задачи 1 с неизвестными функциями $\eta(z)$, $\mu(z)$, $0 \leq z < \infty$, $f(\xi)$, $0 < \xi < \infty$, и неизвестным числом κ ; задано также число $\mu(0)$.

В обеих задачах требуется определить: в общем случае функцию $\sigma(x)$ при $0 \leq x < \infty$; если $\mu(z) \equiv 1$, то функцию $\eta(z)$ при $0 \leq z < \infty$; если функция $\bar{v}(z)$ известна при $0 \leq z < \infty$, то функции $\eta(z)$ и $\mu(z)$ при $0 \leq z < \infty$.

Теорема 1. Обозначим $B(x) = -\frac{1}{2\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$, $g(x) = \frac{dB}{dx} + B^2$. Пусть

производные $d^2\eta/dz^2$ и $d^2\mu/dz^2$ непрерывны при $0 \leq z < \infty$;

$$\int_0^{\infty} x|g|dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} B^2 dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |B|dx < \infty;$$

функция $\varphi(\xi)$ и ее производные вплоть до 4-го порядка непрерывны и абсолютно интегрируемы на прямой $-\infty < \xi < \infty$.

Тогда обратные задачи 1 и 2 имеют единственное решение при любом $\kappa > 0$.

Обратные задачи 3 и 4. При $0 \leq \xi < \infty$ заданы: в обратной задаче 3 — функция $f(\xi)$ и значения $u(H, \xi)$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи 2 с неизвестными числами H , κ и неизвестными функциями $\eta(z)$, $\mu(z)$, $0 \leq z \leq H$, задано также одно из чисел $\kappa\mu(0)$, $\sigma(0)$, $\sigma(H)$ (а два другие неизвестны); в обратной задаче 4 — значения $u(0, \xi)$ и $\partial u / \partial z|_{z=0}$ решения прямой задачи 2 с неизвестными числами H , κ и неизвестными функциями $\eta(z)$, $\mu(z)$, $0 \leq z \leq H$, $f(\xi)$, $0 < \xi < \infty$; задано также одно из чисел $\mu(0)$, $\sigma(0)$, $\sigma(H)$, а два другие неизвестны.

В обеих задачах требуется определить: в общем случае число $x_H = x(H)$ и функцию $\sigma(x)$ при $0 \leq x \leq x_H$; если $\mu(z) \equiv 1$, то число H и функцию $\eta(z)$ при $0 \leq z \leq H$; если функция $\bar{v}(z)$ известна при $0 \leq z \leq H$, то число H и функции $\eta(z)$ и $\mu(z)$ при $0 \leq z \leq H$. В обратной задаче 3 подлежит определению также число κ .

Теорема 2. Пусть производные $d^2\eta/dz^2$ и $d^2\mu/dz^2$ непрерывны при $0 \leq z \leq H$; $d\sigma(z)/dz|_{z=H} = 0$; выполнено последнее условие теоремы 1.

Тогда обратные задачи 3 и 4 имеют единственное решение при любом $\kappa > 0$.

Сформулированные выше задачи возникли как обобщение некоторых обратных задач сейсмологии — задач определения характеристик неоднородного упругого полупространства (в частном случае, переходного слоя) или слоя толщины H со свободной границей, возбуждаемого плоской волной SH , в случае $v(z) < v_0/\sin \theta_0$. При этом

$$\eta(z) = \mu(z) [1/v^2(z) - \sin^2 \theta_0/v_0^2], \quad \kappa = \cos \theta_0 \mu_0 / (v_0 \mu(0)),$$

$$\varphi(\xi) = -2\kappa \varphi_0(\xi).$$

Здесь $v(z)$ и $\mu(z)$ — скорость распространения волн и модуль сдвига в неоднородном слое, v_0 и μ_0 — в однородном полупространстве, откуда падает под углом $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ плоская волна формы $\varphi_0(\xi)$, $u(z, \xi)$ — полное поле смещений в слое, причем $u(0, \xi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi)$, где $\varphi_1(\xi)$ — форма отраженной от слоя плоской волны.

Из теорем 1 и 2 следует, что по заданным для одного значения угла θ_0 : 1) формам падающей и отраженной волн или 2) колебаниям фиксированной точки свободной границы и форме падающей волны — в общем случае однозначно определяется некоторая промежуточная характеристика слоя — функция $\sigma(x, \theta_0)$; функции $v(z)$ и $\mu(z)$ остаются неизвестными. Оказывается, что функции $v(z)$, $\mu(z)$ (и число H) однозначно определяются, если задать данные любой из предыдущих задач для любого θ_0 из произвольной последовательности, сходящейся к предельной точке (причем для численного восстановления $v(z)$ и $\mu(z)$ достаточно задать эти данные для двух значений θ и $\theta + \Delta\theta$ угла θ_0 , где $\Delta\theta$ мало).

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. С. Алексеев, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1514 (1962). ² А. С. Благоевещенский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 115, 28 (1971). ³ М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, УМН, т. 19, в. 2, 3 (1964). ⁴ И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, 309 (1951). ⁵ М. Л. Гервер, Физика Земли, № 8, 3 (1970). ⁶ М. Г. Крейн, ДАН, т. 94, № 6, 767 (1954). ⁷ В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. общ., т. 1, 327 (1952). ⁸ М. А. Неймарк, Тр. Московск. матем. общ., т. 3, 181 (1954). ⁹ В. Г. Романов, Обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1973.