Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 573.831 *МАТЕМАТИКА*

П. Г. ПАРФЕНОВ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 22 IV 1974)

В теории размерности топологических пространств известны теоремы для различных размерностных инвариантов, близкие по форме, однако существенно различающиеся по методу доказательства. Такими теоремами являются, например, теоремы факторизации по весу и по размерностям dim, Ind, Δ * (см. ([2], [3])); теоремы о размерности бикомпактного расширения Чеха — Стоуна для размерностей dim, Ind ([4], [5]); теоремы о существовании бикомпактного расширения данного веса и данной размерности ([3], [6], [8]); теоремы о существовании универсальных бикомпактов для пространств данного веса и данной размерности ([3], [7], [9]).

В настоящей статье дается общий подход к доказательству перечисленных выше теорем и получаются новые результаты, касающиеся размерности Dind.

Размерностная функция Dind введена А. В. Архангельским следующим образом: 1) $\operatorname{Dind} X\leqslant -1$ тогда и только тогда, когда $X=\varnothing$. 2) $\operatorname{Dind} X\leqslant n$, если для любого конечного открытого покрытия пространства X существует конечное семейство дизъюнктных открытых множеств $\{V_1, V_2, \ldots, V_s\}=v$ такое, что $\operatorname{Dind}(X\setminus \cup v)\leqslant n-1$.

Относительно размерности Dind см., например, ([10]).

Пусть дана тройка семейств γ, δ, ν, где $\gamma=\{U_\alpha\}$ — семейство открытых множеств U_α топологического пространства X; $\delta=\{F_\xi\}$ — семейство замкнутых множеств F_ξ пространства X такое, что $\delta\succ\gamma$ **; $\nu=\{\lambda_\beta,\ \beta\in B\}$ — некоторое множество семейств λ_β открытых множеств V_μ^β $(\lambda_\beta=\{V_\mu^\beta,\ \mu\in M\})$ пространства X. Будем говорить, что для тройки семейств γ, δ, ν выполнено условие (I), если для любого замкнутого множества $F\in\delta$ существует такое открытое множество $U\in\gamma$, что $F\subset\cup\{V\in\lambda_\beta\in\nu\colon\ V\subset U,\ \beta\in B\}$.

Далее введем общую размерностную функцию $r_t(X)$; для этого потребуется

Определение. Пусть задана последовательность троек $t=\{(P_i, T_i, S_i),\ i=0, 1, 2, \ldots\}$, где P_i — некоторый класс покрытий топологических пространств, T_i — некоторый класс систем семейств замкнутых множеств в топологических пространствах, S_i — некоторый класс наборов семейств открытых множеств в топологических пространствах. Определим функцию r_t следующим образом:

1) $r_t(X)\leqslant -1$ тогда и только тогда, когда $X=\varnothing$.

2) $r_t(X)\leqslant n$ тогда и только тогда, когда существует система $\eta\in T_n$ семейств замкнутых множеств такая, что для любого покрытия $\gamma\in P_n$ пространства X можно найти семейство замкнутых множеств $\delta\in\eta$ в этом пространстве X и набор $\nu=\{\lambda_\beta\colon\ \beta\in B\}\in S_n$ семейств λ_β открытых в пространстве X множеств такие, что выполнены условия:

а) $\delta\succ\gamma$,

б) тройка семейства δ, γ, ν удовлетворяет условию (I) при $S_n=S_g$ и $\nu\succ\gamma$ при $S_n\neq S_g$;

в) $r_t(X\setminus\cup\lambda_\beta)\leqslant n-1$ для любого $\beta\in B$;

* ΔX — конфинальная аппроксимационная размерность В. И. Пономарева (см. ([1])).

** Выражение $\delta\succ\gamma$ означает, что семейство δ вписано в семейство γ.

3) если неравенство $r_t(X) \leqslant n$ неверно для любого натурального n, то $r_t(X)=\infty$.

В дальнейшем в качестве P_i будут рассматриваться следующие классы покрытий: Pa — конечные открытые покрытия; Pb — бинарные открытые покрытия; Pc — покрытия, состоящие из всего пространства.

В качестве T_i будут рассматриваться следующие классы систем семейств замкнутых множеств: Ta — семейства, состоящие из пустого замкнутого множества; $Tb(m)$ — системы η конечных замкнутых покрытий кратности меньшей m такие, что для любых двух покрытий δ_1, $\delta_2 \in \eta$ данного пространства существует покрытие $\delta_3 \in \eta$ этого пространства, правильно вписанное в каждое из покрытий δ_1 и δ_2, т. е. любой элемент покрытий δ_1 и δ_2 суть в точности объединение некоторых элементов покрытия δ_3; Tc — замыкания бинарных открытых покрытий.

В качестве S_i будут рассматриваться следующие классы: $Sa(k)$ — конечные открытые покрытия кратности меньшей k; Sb — конечные дизъюнктные семейства открытых множеств; Sc — бинарные дизъюнктные семейства открытых множеств; Sd — семейства, состоящие из пустого открытого множества; Se — класс семейств, состоящих из всего пространства; Sf — конечные открытые покрытия; Sg — конечные наборы семейств, состоящих из двух дизъюнктных открытых множеств.

Для любой последовательности t троек перечисленных выше классов справедлива

Теорема 1. *Пусть дано непрерывное отображение f: $X \to Y$ бикомпакта X на бикомпакт Y и известно, что $r_t(X) \leqslant n$.*

Тогда существуют такой бикомпакт Z и такие непрерывные отображения g: $X \xrightarrow{\text{на}} Z$ и h: $Z \xrightarrow{\text{на}} Y$, что выполнены условия:

1) $f=h \circ g$,
2) $w(Z) \leqslant w(Y)$,
3) $r_t(Z) \leqslant r_t(X) \leqslant n$.

Полное доказательство этой теоремы ввиду краткости статьи опущено. Его основным содержанием является построение семейства W открытых в пространстве X множеств и семейства M всевозможных открытых покрытий пространства X элементами семейства W таких, что на любом шаге индуктивного определения функции $r_t(X)$ можно, ограничиваясь только покрытиями из семейства M, найти соответствующие семейства замкнутых множеств и соответствующие наборы семейств открытых множеств, что при этом замкнутые множества оказываются дополнениями до некоторых элементов семейства W, а открытые просто принадлежат этому семейству. После этого строится непрерывное разбиение бикомпакта X и получается бикомпакт Z с требуемыми свойствами.

Справедливы также следующие две теоремы.

Теорема 2. *Пусть X — нормальное пространство; тогда $r_t(X) = r_t(\beta X)$, где βX — бикомпактное расширение Чеха — Стоуна для пространства X.*

Теорема 3. *Пусть X — вполне регулярное пространство такое, что $w(X) \leqslant \tau$ и $r_t(\beta X) \leqslant n$; тогда существует бикомпактное расширение bX пространства X такое, что $w(bX) \leqslant \tau$, $r_t(bX) \leqslant n$.*

Далее потребуется функция $r_t'(X)$, которая вводится точно так же, как функция $r_t(X)$, только в качестве S_i для функции $r_t'(X)$ нельзя брать класс Sg. Для этой функции верна

Теорема 4. *Для любого натурального n и любого кардинального числа τ существует бикомпакт $R^{n\tau}$, содержащий гомеоморфный образ любого бикомпакта X такого, что $r_t'(X) \leqslant n$ и $w(X) \leqslant \tau$; при этом выполнены неравенства $r_t'(R^{n\tau}) \leqslant n$ и $w(R^{n\tau}) \leqslant \tau$.*

Доказательство теорем 3 и 4 полностью опирается на теоремы 1 и 2 и практически ничем не отличается, например, от доказательства для размерности dim (см. ([7], [8])).

В зависимости от последовательности троек $t=\{(P_i, T_i, S_i), i=0, 1, 2,...\}$ в определении функций $r_t(X)$ и $r_t'(X)$ можно получать различные размерностные функции.

Так, чтобы получить размерностный инвариант dim, нужно взять последовательность троек $t=\{(P_0=Pa,\ T_0=Ta,\ S_0=Sa(k+1)),\ (P_i=Pa,\ T_i=Ta,\ S_i=Sd),\ i=1, 2, 3, \ldots\}$, тогда неравенство $r_t(X)\leqslant 0$ эквивалентно неравенству $\dim X\leqslant k$, и как следствия теорем 1—4 получаются соответствующие теоремы из работ [2, 4, 8, 9].

Неравенство $\operatorname{Ind} X\leqslant k$ эквивалентно неравенству $r_t(X)\leqslant k$ для последовательности $t=\{(P_i=Pb,\ T_i=Ta,\ S_i=Sb,\ i=0, 1, 2, \ldots\}$, и следствиями теорем 1—4 получаются соответствующие теоремы из работ [3, 5].

Чтобы получить размерностный инвариант ind, нужно взять последовательность $t=\{(P_i=Pb,\ T_i=Tc,\ S_i=Sg),\ i=0, 1, 2, \ldots\}$; функция $r_t(X)$ для этой последовательности в классе бикомпактов будет совпадать с размерностной функцией $\operatorname{ind} X$.

В классе небикомпактных пространств функция $r_t(X)$ в этом случае может не совпадать с размерностной функцией $\operatorname{ind} X$, теоремы 2 и 3 справедливы для функции $r_t(X)$, хотя они, вообще говоря, неверны для размерности ind.

Из теоремы 1 как частный случай получается факторизационная теорема по весу и размерности ind для бикомпактов, доказанная недавно И. М. Лейбо.

Следствие. 1. *Пусть дано непрерывное отображение f: $X\to Y$ бикомпакта X на бикомпакт Y и известно, что* $\operatorname{ind} X\leqslant n$.

Тогда существуют такой бикомпакт Z и такие непрерывные отображения g: $X\xrightarrow{\text{на}}Z$ и h: $Z\xrightarrow{\text{на}}Y$, что выполнены условия:

1) $f=h\circ g$,
2) $w(Z)\leqslant w(Y)$,
3) $\operatorname{ind} Z\leqslant\operatorname{ind} X\leqslant n$.

Неравенство $\Delta X\leqslant k$ эквивалентно неравенству $r_t(X)\leqslant 0$ для последовательности $t=\{(P_0=Pa,\ T_0=Tb(k+1),\ S_0=Sf),\ (P_i=Pa,\ T_i=Ta,\ S_i=Sd),\ i=1, 2, 3, \ldots\}$. Следствиями теорем 1—4 будут соответствующие теоремы из работ [3, 6].

Неравенство $\operatorname{Dind} X\leqslant k$ эквивалентно неравенству $r_t(X)\leqslant k$ для последовательности $t=\{(P_i=Pa,\ T_i=Ta,\ S_i=Sb),\ i=0, 1, 2 \ldots\}$ и теоремы 1—4 дают неизвестные ранее результаты для размерности Dind.

Теорема 1′. *Пусть дано непрерывное отображение f: $X\to Y$ бикомпакта X на бикомпакт Y и известно, что* $\operatorname{Dind} X\leqslant n$.

Тогда существуют такой бикомпакт Z и такие непрерывные отображения g: $X\xrightarrow{\text{на}}Z$ и h: $Z\xrightarrow{\text{на}}Y$, что выполнены условия:

1) $f=h\circ g$,
2) $w(Z)\leqslant w(Y)$,
3) $\operatorname{Dind} Z\leqslant\operatorname{Dind} X\leqslant n$.

Теорема 2′. *Пусть X — нормальное пространство; тогда* $\operatorname{Dind} X=\operatorname{Dind}(\beta X)$.

Теорема 3′. *Пусть X — вполне регулярное пространство, известно, что $w(X)\leqslant\tau$ и $\operatorname{Dind}(\beta X)\leqslant n$; тогда существует бикомпактное расширение bX пространства X такое, что верны неравенства $w(bX)\leqslant\tau$ и $\operatorname{Dind}(bX)\leqslant n$.*

Теорема 4′. *Для любого натурального n и любого кардинального числа τ существует бикомпакт $R^{n\tau}$, содержащий гомеоморфный образ любого бикомпакта X такого, что $\operatorname{Dind} X\leqslant n$ и $w(X)\leqslant\tau$; при этом верны неравенства $\operatorname{Dind} R^{n\tau}\leqslant n$ и $w(R^{n\tau})\leqslant\tau$.*

Для размерности Δ удается доказать также следующую факторизационную теорему.

Теорема 5. *Пусть дано совершенное отображение* $f\colon X \longrightarrow Y$ *топологического пространства* X *на сильно паракомпактное пространство* Y. *Известно также, что* $\Delta X \leqslant n$.

Тогда существуют сильно паракомпактное пространство Z *и совершенные отображения* $g\colon X \xrightarrow{\text{на}} Z$ *и* $h\colon Z \xrightarrow{\text{на}} Y$ *такие, что выполнены условия*:

1) $f = h \circ g$,
2) $\Delta Z \leqslant n$,
3) $w(Z) \leqslant w(Y)$.

В заключение выражаю горячую признательность В. И. Пономареву за поддержку и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. И. Пономарев,* Матем. сб., т. 60, № 1, 89 (1963). [2] *S. Mardešić,* Ill. J. Math., v. 4, № 2, 278 (1960). [3] *Б. А. Пасынков,* ДАН, т. 201, № 5, 1049 (1971). [4] *H. Wallman.* Ann. Math., v. 39, 112 (1938). [5] *Н. Б. Веденисов*, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, 211 (1941). [6] *В. А. Валиев,* ДАН, т. 200, № 2, 262 (1971). [7] *А. В. Зарелуа,* ДАН, т. 154, № 5 (1964). [8] *Е. Г. Скляренко,* ДАН, т. 123, № 1, 36 (1958). [9] *Б. А. Пасынков,* ДАН, т. 154, № 5, 1042 (1964). [10] *В. Егоров, Ю. Подставкин,* ДАН, т. 178, № 4, 774 (1968).