Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Б. А. ПАСЫНКОВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 22 IV 1974)

Все рассматриваемые отображения предполагаются непрерывными. Пространство B называется абсолютным экстензором (соответственно абсолютным окрестностным экстензором) для класса пространств $\mathfrak{A}$ (кратко $B\in AE(\mathfrak{A})$, соответственно $B\in ANE(\mathfrak{A})$), если для любого $X\in\mathfrak{A}$, любого замкнутого в X множества A и любого отображения f_0: $A\longrightarrow B$ существует продолжение f: $X\longrightarrow B$ (f: $OA\longrightarrow B$, где OA — окрестность A в X) отображения f_0.

Задача продолжения непрерывного отображения с замкнутого подмножества топологического пространства на все пространство является одной из основных в топологии. Еще П. С. Урысон охарактеризовал нормальные пространства как все те пространства, для которых прямая является абсолютным экстензором. Для эвклидовых и метрических пространств соответствующие утверждения были ранее доказаны Брауэром и Титце. В 1952 г. Даукер [3] и Ханнер [4] охарактеризовали коллективно нормальные пространства как все те пространства, для которых все банаховы пространства являются абсолютными экстензорами. В 1951 г. Дугунджи [2] показал, что выпуклые подмножества банаховых пространств являются абсолютными экстензорами для метрических пространств, а в 1972 г. Ю. Лисица [10] распространил это утверждение Дугунджи на нормальные M-пространства *. Первая часть результатов заметки касается обобщения этих результатов Дугунджи и Лисицы (см. теорему 3).

Вторая часть заметки связана с теорией размерности. Как известно [11], нормальные пространства размерности $\leqslant n+1$ — это в точности те пространства, для которых $(n+1)$-мерная сфера является абсолютным экстензором. Непосредственное отношение к этой характеристике размерности имеет доказанная в 1935 г. теорема Куратовского [1]: *тогда и только тогда отображение* f_0: $A\rightarrow B$ *замкнутого подпространства* A *пространства со счетной базой* X, *где* $\dim(X\diagdown A)\leqslant n+1$ *и* B *имеет счетную базу, продолжается в отображение* f: $X\longrightarrow B$ (f: $OA\longrightarrow B$), *когда* $B\in LC^n\cap C^n$ ($B\in LC^n$) (см. [7]). В дальнейшем эта теорема Куратовского обобщалась на метрические [6,7] и другие пространства [8], в частности на нормальные M-пространства [10]. Ниже будут получены наиболее общие в этом направлении результаты (см. теоремы 2 и 4).

Определение 1. Отображение f: $X\longrightarrow R$ пространства X в метрическое пространство R назовем замкнуто-факторизуемым относительно множеств $A\subseteq X$ и $B\subseteq R$ (кратко: замкнуто-(A, B)-факторизуемым), если существует такое метрическое пространство S и такие отображения

$$g\colon X\longrightarrow S \quad \text{и} \quad h\colon S\longrightarrow R,$$

что

$$f=hg, \tag{1}$$

$$h[gA]\subseteq B. \tag{2}$$

* M-пространство есть квазисовершенный прообраз метрического пространства [5]. Отображение квазисовершенно, если оно замкнуто и прообразы точек счетно-компактны.

З а м е ч а н и е 1. Не ограничивая общности, можно считать

$$wS \leqslant wR, \tag{3}$$

если пространство R бесконечно, т. е. $|R| \geqslant \aleph_0$.

Т е о р е м а 1 (факторизационная). *Пусть дано отображение f: $X \to R$ нормального пространства X в бесконечное метрическое пространство R. Если отображение f замкнуто (A, B)-факторизуемо, то существуют такое метрическое пространство S и такие отображения*

$$g\colon X \to S \text{ и } h\colon S \to R,$$

для которых выполняются соотношения (1) — (3) *и соотношения*

$$\dim [gA] \leqslant \dim A, \tag{4}$$

$$\dim (S \setminus [gA]) \leqslant rd_X(X \setminus A) \tag{5}$$

(*см.* ([11]), *гл.* 4, § 7).

Т е о р е м а 2 (общая теорема о продолжении). *Пусть дано замкнуто-(A, B)-факторизуемое отображение f: $X \to R$ нормального пространства X в метрическое пространство R и пусть $B \in C^n \cap LC^n$ $(B \in LC^n)$. Если* $\mathrm{rd}_X(X \setminus A) \leqslant n+1$, *то отображение $f|_A$ можно продолжить в отображение F: $X \to B$ (F: $OA \to B$), где OA — окрестность A.*

Попытаемся выявить сферу действия определения 1 и сформулированных теорем.

Л е м м а 1. *Пусть дано отображение f: $X \to R$ нормального пространства X в метрическое пространство R. Если для замкнутого в X множества A найдется такое множество D типа G_δ в X, что*

$$A \subseteq D, \quad fD \subseteq B,$$

то отображение f замкнуто-(A, B)-факторизуемо.

С л е д с т в и е 1. *Пусть дано отображение f: $X \to R$ нормального X в метризуемое R. Тогда*

(*) *если A замкнуто и имеет тип G_δ в X, то отображение f замкнуто-(A, fA)-факторизуемо;*

(**) *если A замкнуто в X, B имеет тип G_δ в R и $fA \subseteq B$, то отображение f замкнуто-(A, B)-факторизуемо.*

О п р е д е л е н и е 2. Пространство X назовем ρ-п р о с т р а н с т в о м ($\rho\aleph_0$-п р о с т р а н с т в о м), если для любого его замкнутого подпространства A и любого отображения f_0: $A \to B$, где B — метризуемое (сепарабельное метризуемое) пространство, существует такое метризуемое пространство $R \supseteq B$ и такое отображение f: $X \to R$, что

(0) $wR = wB$, $f|_A = f_0$ и f — замкнуто-(A, B)-факторизуемо.

Легко усмотреть, что ρ-пространства коллективно нормальны, а $\rho\aleph_0$-пространства нормальны. Легко доказывается также

П р е д л о ж е н и е 1. *Для метризуемого (сепарабельного метризуемого) пространства B имеем*

$B \in AE$ *(ρ-пространства)* $\Leftrightarrow$ $B \in AE$ *(метрические пространства); соответственно* $B \in AE$ *($\rho\aleph_0$-пространства)* $\Leftrightarrow$ $B \in AE$ *(сепарабельные метрические пространства).*

П р е д л о ж е н и е 2. а) *Коллективно нормальные совершенно нормальные пространства являются ρ-пространствами.*

б) *Совершенно нормальные пространства являются $\rho\aleph_0$-пространствами.*

Доказательство вытекает из пункта (*) следствия 1 и следующей леммы.

Л е м м а 2. *Если пространство X коллективно нормально (нормально), то для любого его замкнутого подпространства A и любого отображения f_0: $A \to B$, где B — бесконечное метризуемое (сепарабельное метризуемое)* *пространство, существует такое метризуемое пространство $R \supseteq B$ и такое отображение f: $X \to R$, что $wR = wB$ и $f|_A = f_0$.*

Действительно, B можно вложить в гильбертово пространство H^τ веса $\tau = wB$, а H^τ есть абсолютный экстензор для коллективно нормальных (нормальных при $\tau = \aleph_0$) пространств ([3], [9]).

Из доказанной леммы, из пункта (**) следствия 1, из того, что полное по Чеху метризуемое пространство имеет тип G_δ в любом объемлющем метризуемом пространстве, и из доказанной выше факторизационной теоремы уже вытекает утверждение теоремы 1 заметки ([10]) для $\alpha = 4{,}5$. Покажем, что аналогично обстоит дело и в случае $\alpha = 6$.

Определение 3. Пространство X назовем L-пространством ($L\aleph_0$ — пространством), если X обладает квазисовершенным отображением на коллективно нормальное совершенно нормальное (совершенно нормальное) пространство.

Ясно, что M-пространства в смысле Мориты (в частности, совершенно паракомпактные пространства, т. е. совершенные прообразы метрических пространств) являются L-пространствами.

Следующая лемма, возможно, уже известна.

Лемма 3. *Если пространство X нормально, а отображение f: $X \xrightarrow{\text{на}} Y$ квазисовершенно, то пространства X и Y одновременно или коллективно нормальны и счетно паракомпактны, или нет.*

Следствие 2. *Нормальные L-пространства коллективно нормальны и счетно паракомпактны.*

Предложение 3. а) *Нормальные L-пространства являются ρ-пространствами.*

б) *Нормальные $L\aleph_0$-пространства являются $\rho\aleph_0$-пространствами.*

Доказательство предложения 3 опирается на следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть дано отображение f: $X \to R$ пространства X в метрическое пространство R и дано квазисовершенное отображение φ: $X \to Y$ в T_1-пространство Y. Через g: $X \to R \times Y$, p: $R \times Y \to R$, q: $R \times Y \to Y$ обозначим соответственно диагональное произведение отображений f и φ и проекции произведения $R \times Y$ на его сомножители. Оказывается:*

а) *отображение g квазисовершенно,*

б) *отображение q: $gX \to Y$ совершенно.*

Из предложений 1 и 3 вытекает, например,

Теорема 3. а) *Выпуклые подмножества банаховых пространств являются абсолютными экстензорами в классе ρ (в частности, нормальных L-)-пространств.*

б) *Сепарабельные банаховы пространства являются абсолютными экстензорами в классе $\rho\aleph_0$-пространств.*

Из определения 2, предложения 3 и теоремы 1 вытекает

Следствие 3. *Пусть дано отображение f_0: $A \to B$ замкнутого подпространства A произвольного ρ ($\rho\aleph_0$-)-пространства X, например, нормального L ($L\aleph_0$-)-пространства X, в бесконечное (сепарабельное) метризуемое пространство B. Тогда существует такое метризуемое пространство $R \supseteq B$, такое метризуемое пространство S и такие отображения*

$$f: X \to R, \quad g: X \to S, \quad h: S \to R,$$

что выполняются условия (0), (1)—(5).

Из этого следствия вытекает

Теорема 4. *Тогда и только тогда любое отображение f_0: $A \to B$ произвольного замкнутого множества A всякого ρ ($\rho\aleph_0$-)-пространства X в метрическое (сепарабельное метрическое) пространство B, где $\mathrm{rd}_X(X \setminus A) \leq n+1$, можно продолжить в отображение f: $X \to B$ (f: $OA \to B$, где OA — окрестность A), когда $B \in C^n \cap LC^n$ ($B \in LC^n$).*

В частности, теорема 4 имеет место и для нормальных L ($L\aleph_0$-)-пространств.

Относительно леммы 1 см. также [14].

З а д а ч и. Внутренним образом охарактеризовать ρ-, $\rho\aleph_0$-, L-, $L\aleph_0$-пространства, а также те пространства, метризуемые абсолютные экстензоры которых те же, что и у метрических пространств.

В связи с теоремой 1 сформулируем еще одно утверждение.

Т е о р е м а 5. *Пусть дано отображение f: $X \to Z$ бикомпакта X на бесконечный бикомпакт Z и в X фиксировано замкнутое подпространство A. Тогда существует такой бикомпакт Y и такие непрерывные отображения g: $X \to Y$ и h: $Y \to Z$, что*

а) $f = hg$,

б) $wY \leqslant wZ$,

в) $\dim gA \leqslant \dim A$,

г) $\mathrm{rd}_Y\,(Y \setminus gA) \leqslant \mathrm{rd}_X\,(X \setminus A)$.

Аналогичное утверждение можно доказать и для системы λ замкнутых подмножеств бикомпакта X мощности $|\lambda| \leqslant wZ$.

В результате мы получаем усиление факторизационных теорем Мардешича и Зарелуа [12, 13].

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
27 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *K. Kuratowski*, Fund. Math., v. 24, 269 (1935). [2] *J. Dugundji*, Pacif. J. Math., v. 1, 353 (1951). [3] *C. H. Dowker*, Arch. math., v. 2, 307 (1952). [4] *O. Hanner*, Arch. math., v. 2, 315 (1952). [5] *K. Morita*, Math. Ann., v. 46, 511 (1970). [6] *Y. Kodama*, Proc. Japan. Acad.. v. 33, 79 (1957). [7] *J. Dugundji*, Comp. Math., v. 13, 229 (1958). [8] *B. McCandless*, Michigan J. Math., v. 9, 193 (1962). [9] *V. Mancuso*, Canad. J. Math., v. 19, 629 (1967). [10] *Ю. Лисица*, ДАН, т. 207, 1042 (1972). [11] *П. С. Александров, Б. А. Пасынков*, Введение в теорию размерности, «Наука», 1973. [12] *S. Mardešić*, Ill. J. Math., v. 4, 278 (1960). [13] *А. В. Зарелуа*, Сиб. матем. журн., т. 5, 532 (1964). [14] *С. Богатый*, ДАН, т. 204, 522 (1972).