Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 1

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В. И. ПАУЛАУСКАС

# ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЗАКОНА

*(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 30 IV 1974)*

В заметке продолжаются исследования автора ([4], [5]) в области предельных теорем в случае устойчивого предельного закона, рассматривается скорость сходимости к многомерным устойчивым законам. Эта задача из-за довольно сложной структуры многомерных устойчивых законов и ряда других трудностей до сих пор мало рассмотрена, по этому вопросу имеется лишь несколько работ И. Баниса (см. ([1]) и литературу там). Однако полученные в этих работах оценки имеют недостатки и не отличаются общностью постановки задачи.

В данной заметке задача об оценке скорости сходимости к многомерным устойчивым законам ставится в следующей форме. Пусть $F_n$ — распределение нормированной суммы независимых одинаково распределенных случайных векторов (с.в.) с распределением $F$, $G_\alpha$ — устойчивое $k$-мерное распределение и $G$ — некоторый класс ограниченных и измеримых функций. При некоторых предположениях о распределении $F$ ищется оценка типа

$$\sup_{g\in G}\left|\int_{R_k} g(x)\,(F_n(dx)-G_\alpha(dx))\right| \leqslant C(k)\,C(G,G_\alpha)\,f_1(n)\,f_2(F),$$

где $C(\cdot)$ обозначает константы, зависящие от величин, указанных в скобках, $f_1(n)\to 0$ при $n\to\infty$, $f_2(F)$ — как правило, различные псевдомоменты.

Отметим, что в случае нормального предельного закона задача такого типа решена методом характеристических функций в ([2]) и методом композиций в ([3]). Наша работа по методу доказательства примыкает к ([3]).

Для формулировки нашего результата нужны некоторые обозначения. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n=(\xi_{n1},\ldots,\xi_{nk})$ — независимые одинаково распределенные с.в. с распределением $F$ и $M\xi_1=0$, если оно существует. Пусть $G_\alpha(A)\equiv G_\alpha(A, I, \Omega_j, \beta, \lambda)$ — $k$-мерное устойчивое распределение, характеристическая функция которого имеет вид

$$\varphi(t)=\begin{cases}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\lambda\sum\limits_{j\in I}(t\Omega_j t')^{\alpha/2}\left[1+i\beta_\alpha(t)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}, & \alpha\neq 1,\quad 0<\alpha\leqslant 2;\\[2ex] \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\lambda\sum\limits_{j\in I}(t\Omega_j t')^{1/2}\left[1+\dfrac{2i}{\pi}\beta_1(t)\right]\right\}, & \alpha=1,\end{cases}$$

где $I$ — некоторое конечное или счетное множество индексов, $\Omega_j$, $j\in I$, — симметрические положительно полуопределенные матрицы $k$-го порядка и ранга $1\leqslant r_j\leqslant k$,

$$\beta_\alpha(t)=\left(\sum_{j\in I}(t\Omega_j t')^{\alpha/2}\right)^{-1}\sum_{j\in I}(t\Omega_j t')^{\alpha/2}\frac{(\omega_j,t)}{|(\omega_j,t)|},\quad \alpha\neq 1,$$

$$\beta_1(t)=\left(\sum_{j\in I}(t\Omega_j t')^{1/2}\right)^{-1}\sum_{j\in I}(t\Omega_j t')^{1/2}\frac{(\omega_j,t)}{|(\omega_j,t)|}\ln|(\omega_j,t)|,$$

$\omega_j$, $j\in I$, — некоторые точки на поверхности $S=\{x\colon \|x\|=1\}$ (здесь $\|x\|=$ $=(\sum_{i=1}^{k} x_i^2)^{1/2}$) (более подробно см. ([6])). Как и в ([5]), введем два класса функций $\mathscr{H}_\beta$ и $\widetilde{\mathscr{H}}_\beta$, а именно: $h(x)\in\mathscr{H}_\beta$, $x\in R_1$, $0<\beta\leqslant 1$, если для функции $h$ выполнены условия

$$h(x)=h(-x)>0,\quad x\neq 0,\quad h(1)=1,$$

$$h(x_1)\leqslant h(x_2),\quad x_1^\beta/h(x_1)\leqslant x_2^\beta/h(x_2),\quad 0<x_1\leqslant x_2,$$

и $h\in\widetilde{\mathscr{H}}_\beta$, если $h\in\mathscr{H}_1$,

$$x_1^\beta/h(x_1)\geqslant x_2^\beta/h(x_2),\quad 0<x_1\leqslant x_2.$$

Введем псевдомоменты, употребляя для краткости вместо $G_\alpha(A, I, \Omega_j, \beta, 1)$ обозначение $G_\alpha(A)$,

$$\mu_m=\sum_{\substack{0\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant m\\ i_1+i_2+\ldots+i_k=m}}\left|\int_{R_k} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_k^{i_k}(F-G_\alpha)(dx)\right|,$$

$$\nu_{\alpha,h}=|F-G_\alpha|(S_1)+\int_{S_1^c}\|x\|^\alpha h(\|x\|)\,|F-G_\alpha|(dx),$$

где $|\mu|(A)$ обозначает вариацию обобщенной меры $\mu$ на множестве $A$, $S_r=\{x\colon \|x\|\leqslant r\}$, $A^c$ — дополнение множества $A$.

Введем класс функций $G$ следующим образом: $g(x)\in G$, $x\in R_k$, если $g$ измерима, $|g(x)|x\leqslant 1$, $g(x+z)\in G$, $g(\alpha\cdot x)\in G$ для всех $z\in R_k$ и $0<\alpha\leqslant 1$ и существует такая константа $C_1(G, G_\alpha)$, что для всех $h>0$ и $g\in G$ существуют две функции $g_1^h$, $g_2^h\in G$ такие, что для всех $\|z\|<h$ выполняются следующие три условия:

$$g_1^h(x+z)\leqslant g(x)\leqslant g_2^h(x+z),$$

$$\int_{R_k}(g(x)-g_1^h(x+z))\,G_\alpha(dx)\leqslant C_1(G, G_\alpha)h,$$

$$\int_{R_k}(g_2^h(x+z)-g(x))\,G_\alpha(dx)\leqslant C_1(G_1, G_\alpha)h.$$

Пусть $g_\alpha(x,\lambda)\equiv g_\alpha(x, I, \Omega_j, \beta, \lambda)$ обозначают плотность распределения $G_\alpha(A, I, \Omega_j, \beta, \lambda)$; $\varkappa=1+[\alpha]$ и $D_m=\partial^{|m|}/\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_k^{i_k}$, где $m=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $i_j\geqslant 0$, $|m|=i_1+i_2+\ldots+i_k$. Обозначим

$$C_2(G_\alpha, l)=\sup_{|m|=1,2,\ldots,l}\ \sup_{i_1+i_2+\ldots+i_k=|m|}\int_{R_k}|D_m g_\alpha(x,1)|\,dx$$

и через $C_3(G_\alpha, k)$ обозначим константу, для которой

$$G_\alpha(S_r^c, I, \Omega_j, \beta, 1)\leqslant C_3(G_\alpha, k)r^{-\alpha},\quad r>0.$$

Пусть $F_n(A)=P\{n^{-1/\alpha}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i-A_n)\in A\}$, где $A_n$ — некоторым образом подобранные центрирующие константы.

Сформулируем основной наш результат.

Теорема. *Пусть для некоторого целого числа $m$, где $[\alpha]\leqslant m\leqslant\varkappa$, если $\alpha$ — нецелые, и $m=[\alpha]$, если $\alpha$ — целое число, выполнены условия*

$$\mu_i=0,\quad i=0,\ldots,m,$$

*и $\nu_{\alpha,h}<\infty$, где $h\in\mathscr{H}_{\varkappa-\alpha}$, если $m=[\alpha]$, и $h\in\widetilde{\mathscr{H}}_{\varkappa-\alpha}$, если $m=\varkappa$.*

*Тогда существует такая константа $C_4(k)$, что для всех $n\geqslant 1$*

$$\sup_{g\in G}\left|\int_{R_k} g(x)\,(F_n-G_\alpha)(dx)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_4(k)C_1(G, G_\alpha)C_2(G_\alpha, m+1)C_3^{1/\alpha}(G_\alpha, k)\,\nu_{\alpha,h}/h(n^{1/\alpha}).$$

Выбирая различные классы $G$ и конкретные устойчивые распределения, можно получить целый ряд следствий из теоремы. Приведем два наиболее наглядные из них.

Следствие 1. *Пусть* $G_1(d)$ *обозначает класс функций, удовлетворяющих условиям* $|g(x)|\leq 1$, $|g(x)-g(y)|\leq d\cdot\|x-y\|$.

*Тогда* $C_1(G_1(d), G_\alpha)=2d$.

Пусть $G_1(A)$ — двумерное распределение Коши с характеристической функцией $\exp\{-(t_1^2+2\rho t_1t_2+t_2^2)^{1/2}\}$ и плотностью распределения (см. ([6]))

$$g_1(y_1, y_2)=\frac{\Gamma(3/2)}{\pi^{3/2}(1-\rho^2)^{1/2}[1+(y_1^2+2\rho y_1y_2+y_2^2)/(1-\rho^2)]^{3/2}},\quad |\rho|<1.$$

Следствие 2. *Пусть* $\mu_1=0$, $\nu_{1,|x|}<\infty$. *Тогда существует абсолютная константа* $C$ *такая, что для всех* $n\geq 1$

$$\sup_{A\in\mathscr{E}}|F_n(A)-G_1(A)|\leq C\frac{\nu_{1,|x|}}{(1-\rho^2)n},$$

*где* $\mathscr{E}$ — *класс всех выпуклых универсально измеримых множеств из* $R_2$.

Полное изложение результатов с доказательствами будет опубликовано в Литовском математическом сборнике, т. 15 № 1 (1975).

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило
8 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Банис,* Кандидатская диссертация, Вильнюс, 1972. [2] *R. N. Bhattacharya,* Proc. of the Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab., v. 2, 1971. [3] *P. H. Blondal,* Dissert., Köln, 1973. [4] *В. И. Паулаускас,* ДАН, т. 211, № 4, 791 (1973). [5] *В. И. Паулаускас,* Литовск. матем. сборн., т. 14, 1 (1974). [6] *S. J. Press.* J. Multivariate Analysis, v. 2, 444 (1972).