Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Академик АН МССР В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю. М. РЯБУХИН

РАДИКАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ ПРАВЫХ ИДЕАЛОВ И ИХ ДОПОЛНЕНИЯ

При построении общей теории радикалов (см. ([1–5])) основную роль играют гомоморфизмы и их ядра — двусторонние идеалы. В настоящей заметке за основу берутся правые идеалы фиксированного кольца и строится правый аналог теории радикалов — теория радикальных замыканий. Доказано, что для любого радикального замыкания существует дополнительное радикальное замыкание. Рассмотрены замыкания Бэра, Джекобсона и их дополнения. Показано, что радикальное замыкание Джекобсона себе двойственно.

Всюду ниже R — некоторое фиксированное кольцо (не обязательно с единицей), а все рассматриваемые кольца — правые идеалы кольца R. Для любого правого идеала A кольца R обозначим символом $\mathfrak{P}(A)$ множество всех правых идеалов кольца R, содержащихся в A. Ясно, что $\mathfrak{P}(A)$ — полная подрешетка полной решетки $\mathfrak{P}(R)$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех пар (A, B), где A, B — правые идеалы кольца R и $B\subseteq A$, т. е. $B\in\mathfrak{P}(A)$. Отображение ξ: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$, ставящее в соответствие каждой паре $(A, B)\in\mathfrak{A}$ правый идеал $\xi(A, B)\in\mathfrak{P}(R)$ назовем *радикальным замыканием*, если для любого правого идеала A кольца R выполняются следующие условия:

1) $(A, B)\in\mathfrak{A}\Rightarrow B\subseteq\xi(A, B)\in\mathfrak{P}(A)$;
2) $(A, B)\in\mathfrak{A}\Rightarrow\xi(A, \xi(A, B))=\xi(A, B)$;
3) $(A, C)\in\mathfrak{A},\ (C, B)\in\mathfrak{A}\Rightarrow\xi(A, B)\subseteq\xi(A, C)$;
4) $(A, B)\in\mathfrak{A}\Rightarrow\xi(\xi(A, B), B)=\xi(A, B)$;
5) $(A, C)\in\mathfrak{A},\ (C, B)\in\mathfrak{A}\Rightarrow\xi(C, B)\subseteq\xi(A, B)$.

Радикальное замыкание ξ назовем *наследственным* или, короче, *кручением*, если выполняется еще условие

6) $(A, C)\in\mathfrak{A},\ (C, B)\in\mathfrak{A}\Rightarrow\xi(C, B)=C\cap\xi(A, B)$.

Пусть ξ: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$ — произвольное радикальное замыкание. Правый идеал $\xi(A, B)$ назовем *ξ-замыканием* правого идеала B в правом идеале A. Скажем, что правый идеал $C\subseteq A$ кольца R *ξ-замкнут в* A, если $\xi(A, C)=C$. Скажем, что правый идеал C кольца R *ξ-радикален* по модулю правого идеала B, если $C\subseteq\xi(B+C, B)$. Ясно, что это равносильно равенству $B+C=\xi(B+C, B)$. Поэтому C ξ-радикален по модулю B тогда и только тогда, когда $B+C$ ξ-радикален по модулю B.

Предложение 1. *Пусть $(A, B)\in\mathfrak{A}$. Тогда для любого радикального замыкания ξ верны утверждения:*

а) *Пересечение любого множества ξ-замкнутых в A правых идеалов само ξ-замкнуто в A. Наименьшим ξ-замкнутым в A правым идеалом, содержащим B, является $\xi(A, B)$.*

б) *Сумма любого множества ξ-радикальных по модулю B правых идеалов сама ξ-радикальна по модулю B. Наибольшим ξ-радикальным по модулю B правым идеалом из $\mathfrak{P}(A)$ является $\xi(A, B)$.*

С каждым радикальным замыканием ξ: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$ свяжем два подмножества в $\mathfrak{A}$: $\mathscr{P}(\xi)=\{(A, B)\in\mathfrak{A}\mid\xi(A, B)=B\}$ и $\mathscr{R}(\xi)=\{(A, B)\in\mathfrak{A}\mid\xi(A, B)=A\}$. В силу предложения 1, для любой пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ получаем

$$\xi(A, B)=\cap\{Q\in\mathfrak{P}(A)\mid Q\supseteq B,\ (A, Q)\in\mathscr{P}(\xi)\},$$
$$\xi(A, B)=\Sigma\{T\in\mathfrak{P}(A)\mid(T+B, B)\in\mathscr{R}(\xi)\}.$$

Поэтому для задания радикального замыкания $\xi\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$ достаточно задать хотя бы один из классов $\mathscr{P}(\xi)$, $\mathscr{R}(\xi)$. Класс $\mathscr{P}\subseteq\mathfrak{A}$ назовем полупростым, если $\mathscr{P}=\mathscr{P}(\xi)$ для некоторого радикального замыкания ξ. Класс $\mathscr{R}\subseteq\mathfrak{A}$ назовем радикальным, если $\mathscr{R}=\mathscr{R}(\xi)$ для некоторого радикального замыкания ξ. Подпарами пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ назовем все такие пары $(C, B)\in\mathfrak{A}$, что $(A, C)\in\mathfrak{A}$. Фактор-парами пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ назовем все такие пары $(A, C)\in\mathfrak{A}$, что $(C, B)\in\mathfrak{A}$. Пару (A, B) назовем нулевой, если $A=B$. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые подклассы класса $\mathfrak{A}$ содержат все нулевые пары, а значит, не пусты.

Предложение 2. *Подкласс $\mathscr{F}$ класса $\mathfrak{A}$ является радикальным тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям*

R1) *Если $(A, B)\in\mathscr{F}$, то $(A+C, B+C)\in\mathscr{F}$ для всех $C\in\mathfrak{P}(R)$;*

R2) *Если для любой ненулевой фактор-пары (A, C) пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ существует ненулевая подпара $(D, C)\in\mathscr{F}$, то $(A, B)\in\mathscr{F}$.*

Из предложения 2 вытекает, что пересечение $\mathscr{R}=\bigcap\mathscr{R}_i$ любого семейства $\{\mathscr{R}_i\,|\,i\in I\}$ радикальных классов само радикально.

Предложение 3. *Подкласс $\mathscr{T}$ класса $\mathfrak{A}$ является полупростым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям*

P1) *Если $(A, B)\in\mathscr{T}$, то $(A\cap C, B\cap C)\in\mathscr{T}$ для всех $C\in\mathfrak{P}(R)$.*

P2) *Если для любой ненулевой подпары (C, B) пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ существует ненулевая фактор-пара $(C, D)\in\mathscr{T}$, то $(A, B)\in\mathscr{T}$.*

Из предложения 3 следует, что пересечение $\mathscr{P}=\bigcap\mathscr{P}_i$ любого семейства $\{\mathscr{P}_i\,|\,i\in I\}$ полупростых классов само полупросто.

Скажем, что радикальное замыкание ξ_1 больше радикального замыкания ξ_2, и пишем $\xi_1\geqslant\xi_2$ или $\xi_2\leqslant\xi_1$, если $\forall(A, B)\in\mathfrak{A}\ \ \xi_1(A, B)\supseteq\xi_2(A, B)$. Очевидно, $\mathscr{R}(\xi_1)\supseteq\mathscr{R}(\xi_2)\Leftrightarrow\xi_1\geqslant\xi_2\Leftrightarrow\mathscr{P}(\xi_1)\subseteq\mathscr{P}(\xi_2)$. Поэтому мы можем определить обычным образом объединение $\bigvee\xi_i$ и пересечение $\bigwedge\xi_i$ радикальных замыканий ξ_i.

Предложение 4. *Класс Z всех радикальных замыканий является полной решеткой. А именно, для любого семейства $\{\xi_i\,|\,i\in I\}$ радикальных замыканий верны равенства*

$$\mathscr{R}(\bigwedge\xi_i)=\bigcap\mathscr{R}(\xi_i),\quad \mathscr{P}(\bigvee\xi_i)=\bigcap\mathscr{P}(\xi_i).$$

Пусть ξ — произвольное радикальное замыкание. Радикальное замыкание ξ' назовем дополнительным к радикальному замыканию ξ, или дополнением ξ, если ξ — наибольшее среди всех таких радикальных замыканий ξ^*, что $\forall(A, B)\in\mathfrak{A}$, $\xi(A, B)\cap\xi^*(A, B)=B$. Скажем, что радикальное замыкание себе двойственно, если $\xi=\xi''$, где $\xi''=(\xi')'$.

Основная лемма. *Пусть ξ — радикальное замыкание и $\{\xi_i\,|\,i\in I\}$ — любое такое семейство радикальных замыканий, что $\forall i\in I\ \forall(A, B)\in\in\mathfrak{A}\ \ \xi(A, B)\cap\xi_i(A, B)=B$. Тогда, если $\xi^*=\bigvee\xi_i$, то $\xi(A, B)\cap\xi^*(A, B)=B$.*

Из основной леммы сразу следует

Теорема 1. *Для любого радикального замыкания ξ существует дополнительное замыкание ξ', причем ξ' — кручение.*

Пусть $(A, B)\in\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{R}(A, B)=\Sigma\{C\in\mathfrak{P}(A)\,|\,C^k\subseteq B\}$ для некоторого $k\geqslant1$. Ясно, что $\mathfrak{R}(A, B)$ — правый идеал, причем $B\subseteq\mathfrak{R}(A, B)\in\mathfrak{P}(A)$. Строим теперь цепь правых идеалов

$$B=\mathfrak{R}_0(A, B)\subseteq\mathfrak{R}_1(A, B)\subseteq\ldots\subseteq\mathfrak{R}_\alpha(A, B)\subseteq\ldots,\tag{1}$$

где $\mathfrak{R}_\alpha(A, B)=\mathfrak{R}(A, \mathfrak{R}_{\alpha-1}(A, B))$, если α не является предельным порядковым числом, и $\mathfrak{R}_\alpha(A, B)=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathfrak{R}_\alpha(A, B)$, если α — предельное. Цепь (1) стабилизируется на некотором порядковом числе τ. Обозначим $\mathfrak{B}(A, B)=\bigcup\limits_{\alpha\geqslant0}\mathfrak{R}_\alpha(A, B)=\mathfrak{R}_\tau(A, B)$.

Предложение 5. *Отображение $\mathfrak{B}\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$, ставящее в соответствие каждой паре $(A, B)\in\mathfrak{A}$ правый идеал $\mathfrak{B}(A, B)$, является радикальным замыканием.*

Отображение $\mathfrak{B}$ назовем **радикальным замыканием Бэра**, а правый идеал $\mathfrak{B}(A, B)$, являющийся $\mathfrak{B}$-замыканием правого идеала B в правом идеале A,— **замыканием Бэра**. Правый идеал S кольца R назовем **слаборегулярным** по модулю правого идеала B, если для любого $s\in S$ существует такой элемент $s'\in(s)$, что $s-ss'\in B$. Здесь (s) — главный идеал кольца R, порожденный элементом s. Напомним, что кольцо R называется слабо регулярным ([6]), если оно слабо регулярно по модулю нулевого идеала, т. е. если для любого $a\in R$, $a\in a(a)$.

Теорема 2. *Множество $\mathscr{R}(\sigma)=\{(A, B)\in\mathfrak{A}$, $A+C$ слабо регулярно по $B+C$ $\forall C\in\mathfrak{P}(R)\}$ является радикальным классом. В частности, для любой пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ среди правых идеалов T таких, что $(A, T)\in\mathfrak{A}$ и $(T, B)\in\mathscr{R}(\sigma)$, существует наибольший правый идеал $\sigma(A,B)$. Отображение σ: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$ — радикальное наследственное замыкание, причем σ является дополнительным к радикальному замыканию Бэра $\mathfrak{B}$, т. е. $\sigma=\mathfrak{B}'$.*

Следствие 1. *Для любого кольца R равносильны утверждения:* 1) $\mathfrak{B}'(R, 0)=R$; 2) $\mathfrak{B}'(A, B)=A$; 3) $\mathfrak{B}(A, B)=B$ $\forall(A, B)\in\mathfrak{A}$; 4) *кольцо R слабо регулярное.*

Пусть $(A, B)\in\mathfrak{A}$. Скажем, что A **квазирегулярен** по модулю B, если для любого $a\in A$ существует такой $a'\in R$, что $a+a'-aa'\in B$. Ясно, что $a'\in A$, так как $B\subseteq A$. Положим теперь $J(A, B)=\Sigma\{C\in\mathfrak{P}(A)\,|\,C$ квазирегулярный по модулю $B\}$.

Предложение 6. *$J(A, B)$ является квазирегулярным правым идеалом по модулю B. Отображение J: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$, ставящее в соответствие каждой паре $(A, B)\in\mathfrak{A}$ наибольший квазирегулярный правый идеал (в $\mathfrak{P}(A)$!) по модулю B, является наследственным радикальным замыканием.*

Отображение J назовем **радикальным замыканием Джекобсона**, а правый идеал $J(A, B)$ — **замыканием Джекобсона**. Пусть A — произвольный правый идеал в R. Скажем, что правый идеал M_A кольца R является **максимальным модулярным** в A, если M_A максимальный среди правых идеалов кольца R, строго меньших A и модулярных в A ($\exists e\in A$, $\forall a\in A$ $ea-a\in M_A$).

Предложение 7. *Если $(A, B)\in\mathfrak{A}$, то $J(A, B)=\cap\{M_A|M_A$ — максимальный модулярный в A правый идеал и $M_A\supseteq B\}$.*

Теорема 3. *Множество $\mathscr{R}(\gamma)=\{(A, B)\in\mathfrak{A}|J(A+C, B+C)=B+C$ $\forall C\in\mathfrak{P}(R)\}$ является радикальным классом. В частности, для любой пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ среди правых идеалов T таких, что $(A, T)\in\mathfrak{A}$ и $(T, B)\in\mathscr{R}(\gamma)$, существует наибольший правый идеал $\gamma(A, B)$. Отображение γ: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$ — наследственное радикальное замыкание, причем γ является дополнительным к радикальному замыканию J,* т. е. $\gamma'=J'$.

Напомним, что кольцо R называется V-кольцом ([7]), если каждый собственный правый идеал в R является пересечением максимальных модулярных правых идеалов его содержащих.

Следствие 2. *Для любого кольца R равносильны утверждения:* 1) $J'(R,0)=R$; 2) $J'(A,B)=A$ $\forall(A,B)\in\mathfrak{A}$; 3) $J(A,B)=B$ $\forall(A,B)\in\mathfrak{A}$; 4) *кольцо R является V-кольцом.*

Лемма. *Пусть A — произвольный правый идеал кольца R и M_A — максимальный модулярный в A правый идеал. Тогда существует такой максимальный модулярный правый идеал M в кольце R, что $M_A=A\cap M$.*

Теорема 4. *Радикальное замыкание Джекобсона J себе двойственно, т. е. $J=J''$. При этом вершины равенства*

$$\mathscr{R}(J')=\{(T, B)\in\mathfrak{A}|\forall C\in\mathfrak{P}(R),\ J(T+C, B+C)=B+C\},$$
$$\mathscr{R}(J'')=\{(T, B)\in\mathfrak{A}|\forall C\in\mathfrak{P}(R),\ J'(T+C, B+C)=B+C\}=\mathscr{R}(J).$$

Построим теперь еще один пример радикального замыкания. Пусть $\mathscr{F}$ — произвольный подкласс в $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий условию R1. Для любой пары $(A, B)\in\mathfrak{A}$ полагаем $\mathscr{F}(A, B)=\Sigma\{N\in\mathfrak{P}(A)\,|\,(N+B, B)\in\mathscr{F}\}$ и строим цепь правых идеалов кольца R

$$B=\mathcal{F}_0(A, B)\subseteq\mathcal{F}_1(A, B)\subseteq\ldots\subseteq\mathcal{F}_\alpha(A, B)\subseteq\ldots,$$

полагая $\mathcal{F}_{\alpha+1}(A,B)=\mathcal{F}(A,\mathcal{F}_\alpha(A,B))$ *для всех* α *и* $\mathcal{F}_\alpha(A,B)=\bigcup\mathcal{F}_{\beta<\alpha}(A,B)$ для предельных α. Обозначим $\xi^{\mathcal{F}}(A, B)=\bigcup\limits_{\alpha\geqslant 0}\mathcal{F}_\alpha(A, B)=\mathcal{F}_\tau(A, B)$, где τ — порядковое число, на котором построенная цепь стабилизируется.

Теорема 5. *Для любого класса* $\mathcal{F}$ *из* $\mathfrak{A}$, *удовлетворяющего условию в* R1, *отображение* $\xi^{\mathcal{F}}\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{P}(R)$ *является радикальным замыканием — нижним радикальным замыканием, порожденным классом* $\mathcal{F}$. *Класс* $\mathcal{R}(\xi^{\mathcal{F}})$ *является наименьшим радикальным классом, содержащим класс* $\mathcal{F}$. *Класс* $\mathcal{R}(\xi^{\mathcal{F}})$ *совпадает с классом всех таких пар* $(A, B)\in\mathfrak{A}$, *что любая ненулевая подпара* (C, B) *пары* (A, B) *не принадлежит классу* $\mathcal{F}$.

В заключение заметим, что полученные общие результаты (предложения 1—4 и теоремы 1,5) верны не только для колец, так как общую теорию радикальных замыканий можно развивать и в решетках (ср. ([4], [5])). Кроме того, аналогию между теорией радикальных замыканий и теорией радикалов можно использовать и в «обратную сторону». А именно, аналогичным методом можно доказать основную лемму для радикалов (в смысле Куроша) и вывести из этого, что для любого радикала в смысле Куроша существует дополнительный радикал, если основной класс колец состоит из ассоциативных колец.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
11 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Г. Курош,* Матем. сб., т. 33, № 1, 13 (1953). [2] *В. А. Андрунакиевич,* Матем. сб., т. 44, 179 (1958). [3] *В. А. Андрунакиевич,* Матем. сб., т. 55, 329 (1961). [4] *S. A. Amitsur,* Am. J. Math., v. 74, 774 (1952). [5] *S. A. Amitsur,* Am. J. Math., v. 76, 100 (1954). [6] *B. Brown, N. McCoy,* Trans. Am. Math. Soc., v. 69, 302 (1950). [7] *C. Faith,* Algebra: Rings, Modules and Categories, v. 1, Berlin, 1973.