Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 513.835 *МАТЕМАТИКА*

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

О СОПРЯЖЕННОСТИ РОСТКОВ НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОГО КЛАССА ГЛАДКОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1974)

Ростки C^k-отображений F, G: $(R^n, 0)\to(R^n, 0)$ называются сопряженными в классе C^q, если существует такая C^q-замена координат Φ: $(R^n, 0)\to(R^n, 0)$, что $\Phi\circ F=G\circ\Phi$. Вопрос о сопряженности ростков неаналитических отображений рассматривается в [1-4]. В этих работах предполагается, что линейное приближение $\Lambda=F'(0)$ не имеет спектра в нуле и на единичной окружности. В [5] изучались ростки C^∞-отображений, спектр линейного приближения которых лежит на единичной окружности. Здесь мы рассмотрим случай конечной гладкости.

Если $S\subset R^n$ — росток в начале координат замкнутого множества, то через $\rho(x, S)$ мы обозначим расстояние от точки x до S.

Теорема 1. *Пусть F: $(R^n, 0)\to(R^n, 0)$ — росток C^k-отображения и $S\subset R^n$ — росток замкнутого множества, инвариантный относительно F. Пусть, кроме того, существуют такие числа $\alpha\geqslant0$ и $\beta>1$, что при некоторых $c_i>0$ справедливы неравенства*

$$|\det F'(x)|\geqslant c_1\rho^\alpha(x, S),\quad \rho(Fx, S)\leqslant c_2\rho^\beta(x, S).$$

Найдутся такие числа $k_0=k_0(\alpha, \beta)$ и $\nu=\nu(\alpha, \beta)$, что если G: $(R^n, 0)\to(R^n, 0)$ — росток C^k-отображения, $k\geqslant k_0$ и *$G(x)-F(x)=o(\rho^k(x, S))$, то ростки F и G сопряжены в классе C^q, где $q\geqslant\nu(\alpha, \beta)\cdot k$.*

Следствие 1. *Пусть F: $(R^n, 0)\to(R^n, 0)$ — росток C^k-отображения, удовлетворяющий неравенствам*

$$|\det F'(x)|\geqslant c_1\|x\|^\alpha,\quad \|F(x)\|\leqslant c_2\|x\|^\beta$$

при некоторых $c_i>0$, $\alpha\geqslant0$, $\beta>1$.

Найдутся такие числа $k_0=k_0(\alpha, \beta)$ и $\nu=\nu(\alpha, \beta)$, что если G: $(R^n, 0)\to(R^n, 0)$ — росток C^k-отображения $k\geqslant k_0$ и k-струи ростков F и G одинаковые, то росток G сопряжен с F в классе C^q, где $q\geqslant\nu(\alpha, \beta)\cdot k$.

Если росток F удовлетворяет неравенствам следствия 1, то его линейное приближение равно нулю.

Следствие 2. *Пусть F: $(R^n, 0)\to(R^n, 0)$ — росток C^∞-отображения, удовлетворяющий неравенствам*

$$|\det F'(x)|\geqslant c_1\|x\|^\alpha,\quad \|F(x)\|\leqslant c_2\|x\|^\beta$$

при некоторых $c_i>0$, $\alpha\geqslant0$, $\beta>1$.

Тогда росток F в любом конечном классе гладкости сопряжен с полиномиальным отображением.

Пример. Пусть

$$F(x)=(\dots(Hx)x\dots x)+f(x),$$

где H — невырожденный симметрический $(p+1)$-индексный тензор, $p\geqslant2$, и $f(x)=o(\|x\|^p)$ — C^∞-отображение. Росток F удовлетворяет условиям следствия 2. Поэтому F в любом конечном классе гладкости сопряжен с полиномиальным отображением. Всякий росток C^k-отображения G:

$(R^n, 0) \to (R^n, 0)$, имеющий такую же k-струю, что и F, сопряжен с F в классе C^q, где $q \geqslant \nu(p) \cdot k$.

Сформулируем теперь условия сопряженности ростков диффеоморфизмов.

Будем говорить, что ростки S_1, $S_2 \subset R^n$ замкнутых множеств (p, q)-регулярно расположены, если всякий росток C^q-функции f: $(R^n, 0) \to (R^1, 0)$ такой, что

$$f^{(i)}(x) = 0, \quad x \in S_1 \cap S_2, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, q,$$

может быть представлен в виде суммы $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где f_j — такие ростки C^p-функций, что

$$f_1^{(i)}(x) = 0,\ x \in S_1; \quad f_2^{(i)}(x) = 0,\ x \in S_2, \quad i = 0, 1, \ldots, p.$$

Имеет место

Лемма 1. *При любом $k \leqslant \infty$ два подпространства $L_1, L_2 \subset R^n$ $([k/2, k])$-регулярно расположены.*

Определение. Росток C^k-отображения F: $(R^n, 0) \to (R^n, 0)$ называется квазигиперболическим порядка $r \geqslant 0$ на ростке $S \subset R^n$ замкнутого множества, если существует такое число $p > 0$ и такие (pk, k)-регулярно расположенные ростки замкнутых множеств $S_\pm$, инвариантных относительно F, что $S_+ \cap S_- = S$, и при некоторых $c_\pm > 0$, $a_i > 0$ справедливы неравенства

$$\rho(Fx, S_+) \leqslant \rho(x, S_+)(1 - c_+ \rho^r(x; S)), \quad \rho(F^- x, S_-) \leqslant \rho(x, S_-)(1 - c_- \rho^r(x; S)),$$

$$\|F'(x)\| \leqslant 1 + a_1 \rho^r(x, S), \quad \|(F'(x))^{-1}\| \leqslant 1 + a_2 \rho^2(x, S).$$

Может оказаться, что $S_- = R^n$ и $S_+ = S$. Тогда росток F называется квазисжатием порядка r на S. Если $S_+ = R^n$ и $S_- = S$, то росток F называется квазирастяжением порядка r на S. Росток, квазигиперболический порядка $r = 0$ на S, называется гиперболическим на S. Числа r, $c_\pm$, a_1, a_2, p, а также $d(F) = \max(\|F'(0)\|, \|(F'(0))^{-1}\|)$ называются показателями квазигиперболичности ростка F. Если F квазигиперболичен порядка $r > 0$, то $d(F) = 1$.

Теорема 2. *Пусть F: $(R^n, 0) \to (R^n, 0)$ — росток C^k-отображения, квазигиперболического на ростке $S \subset R^n$ замкнутого множества. Существуют такие числа $\nu > 0$, $k_0 > 0$, зависящие только от показателей квазигиперболичности, что если G: $(R^n, 0) \to (R^n, 0)$ — росток C^k-отображения, $k \geqslant k_0$ и $G(x) - F(x) = o(\rho^k(x, S))$, то ростки F и G сопряжены в классе C^q, где $q \geqslant \nu k$.*

Из теоремы 2 вытекает, что росток C^∞-диффеоморфизма, квазигиперболического в начале координат, можно заменой переменных любого конечного класса гладкости привести к полиномиальному отображению. При этом полиномиальное отображение может быть выбрано так, что оно в некотором смысле будет иметь нормальную форму. Именно, справедлива

Лемма 2. *Пусть $\hat{F}$ — формальный ряд Тейлора C^∞-отображения F: $(R^n, 0) \to (R^n, 0)$ с линейным приближением $\Lambda = F'(0)$. Существует такая формальная замена переменных Φ, что $(\Phi \circ \hat{F} \circ \Phi^{-1})(x) = \Lambda x + f(x)$, где f — формальный ряд с нулевой 1-струей, коммутирующей с сопряженным оператором Λ^*.*

Из этой леммы и теоремы 2 непосредственно получается

Следствие 3. *Пусть F: $(R^n, 0) \to (R^n, 0)$ — росток C^∞-отображения, квазигиперболический в начале координат.*

Тогда росток F в любом конечном классе гладкости сопряжен с полиномиальным отображением $P(x) = \Lambda x + h(x)$, $h(x) = O(\|x\|^2)$, где Λ: $R^n \to$

$\to R^n$ — *линейный оператор, а h коммутирует с сопряженным оператором Λ^*.*

Из лемм 1 и 2 получаем также

Следствие 4. *Пусть $F(x)=\Lambda x+f(x)$ — росток C^∞-диффеоморфизма и существуют такие инвариантные относительно F подпространства N_1, N_2, что $R^n=N_1+N_2$ (сумма прямая), и для некоторых чисел $r\geqslant 0$, $c_\pm>0$, $a_i>0$ справедливы оценки*

$$\rho(Fx,\ N_1)\leqslant\rho(x,\ N_1)(1-c_+\|x\|^r),\quad \rho(F^{-1}x,\ N_2)\leqslant\rho(x,\ N_2)(1-c_-\|x\|^r),$$
$$\|F'(x)\|\leqslant 1+a_1\|x\|^r,\quad \|(F'(x))^{-1}\|\leqslant 1+a_2\|x\|^r.$$

Тогда заменой переменных Φ: $(R^n,0)\to(R^n,0)$ любого конечного класса гладкости росток F можно привести к полиномиальному отображению

$$(\Phi\circ F\circ\Phi^{-1})(x)=\Lambda x+h(x),\quad h(x)=O(\|x\|^2),$$

где Λ: $R^n\to R^n$ — линейный оператор, а h коммутирует с оператором Λ^*.

Рассмотрим подробнее ростки одномерных отображений. Пусть

$$F(x)=\lambda x+cx^r+f(x),\quad f(x)=o(x^r),\quad x\in R^1,\quad r\geqslant 2,$$

$F(x)$ — C^k-росток одномерного отображения и $c\neq 0$. Если $\lambda=0$, то росток удовлетворяет условиям следствия 3 с $\alpha=r-1$, $\beta=r$. Если $|\lambda|\neq 0$, 1, то F — росток гиперболического диффеоморфизма в начале координат. Если $\lambda=1$ и r нечетно, то в зависимости от знака c росток F является либо квазисжатием, либо квазирастяжением порядка $r-1$. Если же $\lambda=1$ и r четно, то росток квазигиперболичен порядка $r-1$ в начале координат. В самом деле, пусть R_+ — правая вещественная полуось, а R_- — левая. Тогда ростки $R_\pm$ (k,k)-регулярно расположены и $R_+\cap R_-=\{0\}$. При этом, если $c>0$, то F — квазисжатие на ростке R_- и квазирастяжение на R_+. Если же $c<0$, то F — квазисжатие на ростке R_+ и квазирастяжение на R_-. Таким образом, получается

Следствие 5. *Пусть F: $(R^1,\ 0)\to(R^1,\ 0)$ — росток одномерного C^k-отображения, причем*

$$F(Fx)=\alpha x+bx^r+o(x^r),\quad 2\leqslant r<\infty,\quad b\neq 0.$$

Существуют такие числа $k_0(\alpha,b,r)$ и $\nu(\alpha,b,r)$, что каждый росток G: $(R^1,0)\to(R^1,0)$ одномерного C^k-отображения $k\geqslant k_0$, k-струя которого совпадает с k-струей ростка F, сопряжен с F в классе C^q, где $q\geqslant\nu(\alpha,b,r)\cdot k$. Каждый C^∞-росток одномерного отображения такой, что ряд Тейлора $\hat{F}^2$ отличен от 0 и 1, в любом конечном классе гладкости сопряжен с полиномиальным отображением.

Если росток C^k-отображения F: $(R^n,\ 0)\to(R^n,\ 0)$ квазигиперболичен в начале координат, то спектр его линейного приближения либо целиком лежит на единичной окружности, либо не пересекается с ней. Согласно теореме 2, при достаточно большом k всякий росток C^k-отображения, k-струя которого совпадает с k-струей ростка F, сопряжен с F в некотором конечном классе гладкости. Класс ростков, обладающих описанным свойством, значительно шире класса квазигиперболических ростков и содержит ростки диффеоморфизмов с произвольным спектром линейного приближения.

Пусть $F(x)=\Lambda x+O(\|x\|^2)$ — росток C^k-диффеоморфизма с линейным приближением $\Lambda=F'(0)$. Пусть, кроме того, L_1 — инвариантное подпространство оператора Λ, отвечающее части спектра, лежащей на единичной окружности, а L — инвариантное подпространство, отвечающее всей остальной части спектра. Обозначим через P проектор на L вдоль подпространства L_1.

Теорема 3. *Пусть росток F удовлетворяет следующим условиям:*

а) *подпространство L_1 инвариантно относительно F и сужение F: $(L_1, 0) \to (L_1, 0)$ является ростком квазигиперболического в начале координат диффеоморфизма;*

б) *при каждом $x \in L_1$ матрица $PF'(x)$ совпадает с матрицей $P\Lambda$, так что $PF'(x)$ не зависит от x при $x \in L_1$.*

Тогда найдутся такие числа $k_0(F)$ и $\nu(F)$, зависящие только от показателей квазигиперболичности сужения F: $(L_1, 0) \to (L_1, 0)$ и от оператора Λ, что при $k \geqslant k_0(F)$ всякий росток C^k-диффеоморфизма, имеющий такую же k-струю, что и F, сопряжен с F в классе C^q, где $q \geqslant \nu(F) \cdot \ln k$.

Следствие 6. *Пусть F — росток C^∞-диффеоморфизма удовлетворяет условиям* а) *и* б) *теоремы* 3.

Тогда в любом конечном классе гладкости F сопряжен с полиномиальным отображением $P(x) = \Lambda x + h(x)$, $h(x) = O(\|x\|^2)$, где h коммутирует с оператором Λ^*.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
19 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. Sternberg*, Am. J. Math., v. 80, 623 (1958). [2] *P. Hartman*, Bol. Soc. Math. Mexicana, v. 5, 220 (1960). [3] *R. Venti*, J. Diff. Equation, v. 5, 182 (1966). [4] *Г. Р. Белицкий*, Функц. анализ и его приложения, т. 7, в. 4 (1973). [5] *Г. Р. Белицкий*, Там же, т. 6, в. 1 (1972).