Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 519.48 *МАТЕМАТИКА*

Д. В. БОТНАРУ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ БИКАТЕГОРНЫХ СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 24 I 1974)

В настоящей заметке рассматривается связь между обобщенными бикатегорными структурами ([1]) в категории $\mathscr{C}$ и рефлексивными подкатегориями категории ее стрелок. Доказывается, что класс инъекций любой обобщенной бикатегорной структуры в $\mathscr{C}$ является рефлексивной подкатегорией категории стрелок. Указываются достаточные условия, при которых справедливо обратное утверждение. Из этих условий получается описание правых бикатегорных структур ([2], [1]) в категории $\mathscr{C}$ с помощью свойств классов инъекций, в отличие от ([2]), где правые бикатегорные структуры описываются с помощью свойств классов проекций.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория. E, M, I, U будут означать соответственно класс всех ее эпиморфизмов, мономорфизмов, изоморфизмов и единиц; M_e — класс всех уравнителей. $\vec{\mathscr{C}}$ будет означать категорию стрелок категории $\mathscr{C}$: объекты этой категории — морфизмы (стрелки) категории $\mathscr{C}$, морфизмами же стрелки γ в стрелку δ служат всевозможные пары (α, β) (точнее, четверки $(\gamma; \alpha, \beta; \delta)$), для которых существуют и равны композиции $\beta\gamma$ и $\delta\alpha$. Если $\mathscr{A}$ — непустой класс морфизмов из $\mathscr{C}$, то $\vec{\mathscr{A}}$ будет означать полную подкатегорию категории $\vec{\mathscr{C}}$, классом объектов которой служит $\mathscr{A}$.

О п р е д е л е н и е ([1]). Морфизм $\varkappa$ называется о р т о г о н а л ь н ы м с в е р х у к м о р ф и з м у λ, а λ — о р т о г о н а л ь н ы м с н и з у к $\varkappa$ (в записи: $\varkappa\perp\lambda$), если для любого коммутативного квадрата $\lambda\alpha=\beta\varkappa$ существует единственный морфизм γ такой, что $\alpha=\gamma\varkappa$ и $\beta=\lambda\gamma$. Если $\mathscr{K}$ класс морфизмов из $\mathscr{C}$, то $\mathscr{K}^{\perp}$ $(\mathscr{K}^{\top})$ означает класс всех таких морфизмов λ, что $\varkappa\perp\lambda$ $(\lambda\perp\varkappa)$ для всех $\varkappa\in\mathscr{K}$.

О п р е д е л е н и е. Упорядоченная пара классов морфизмов $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ категории $\mathscr{C}$ называется б и к а т е г о р н о й с т р у к т у р о й в $\mathscr{C}$ ([3]), если выполнены следующие аксиомы:

B_0. $I\subset\mathscr{K}\cap\mathscr{L}$.

B_1. $\mathscr{K}$ и $\mathscr{L}$ замкнуты относительно композиции.

B_2. $\mathscr{C}=\mathscr{L}\mathscr{K}$, т. е. морфизм α из $\mathscr{C}$ допускает разложение $\alpha=\lambda\varkappa$, где $\varkappa\in\mathscr{K}$ и $\lambda\in\mathscr{L}$. При этом, если $\lambda\varkappa=\lambda'\varkappa'$, где $\varkappa$, $\varkappa'\in\mathscr{K}$ и λ, $\lambda'\in\mathscr{L}$, то существует и притом единственный морфизм β такой, что $\varkappa'=\beta\varkappa$ и $\lambda=\lambda'\beta$.

B_3. $\mathscr{K}\subset E$.

B_4. $\mathscr{L}\subset M$.

Пара $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ называется п р а в о й (л е в о й) бикатегорной структурой в $\mathscr{C}$ ([2]), если выполнены аксиомы B_0 — B_3 (B_0 — B_2 и B_4), и о б о б щ е н н о й бикатегорной структурой ([1]), если выполнены аксиомы B_0 — B_2. Морфизмы из $\mathscr{K}$ называются п р о е к ц и я м и, из $\mathscr{L}$ — и н ъ е к ц и я м и.

О п р е д е л е н и е ([4]). Пусть $\mathscr{D}$ — полная подкатегория категории $\mathscr{C}$. Объект $X_{\mathscr{D}}\in|\mathscr{D}|$ называется $\mathscr{D}$-р е п л и к о й о б ъ е к т а $X\in|\mathscr{C}|$, если существует такой морфизм α_X: $X\to X_{\mathscr{D}}$, что для каждого морфизма α: $X\to Y$ с $Y\in|\mathscr{D}|$ существует единственный морфизм β: $X_{\mathscr{D}}\to Y$ такой, что $\alpha=\beta\alpha_X$. Если каждый объект категории $\mathscr{C}$ обладает $\mathscr{D}$-репликой, то подкатегория $\mathscr{D}$ называется рефлексивной.

Дуальные понятия — $\mathscr{D}$-кореплика и корефлексивная подкатегория.

Пусть $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ — обобщенная бикатегорная структура в $\mathscr{C}$ и для каждого морфизма α из $\mathscr{C}$ выбрано разложение $\alpha=\lambda\varkappa$, где $\varkappa\in\mathscr{K}$, $\lambda\in\mathscr{L}$. Тогда

1. *Соответствие* $\alpha\mapsto(\lambda, (\varkappa, 1))$ *задает* $\vec{\mathscr{L}}$ *как рефлексивную подкатегорию категории* $\vec{\mathscr{C}}$.

Однако не каждая рефлексивная подкатегория категории $\vec{\mathscr{C}}$ порождается описанным образом обобщенной бикатегорной структурой в $\mathscr{C}$.

Пример. Пусть в $\mathscr{C}$ выполняются следующие условия:

(A) для каждого $\alpha\in\mathscr{C}$ существует кодекартов квадрат $\pi_1\alpha=\pi_2\alpha$;

(B) дублет (π_1, π_2) из (A) обладает уравнителем $\varkappa=\mathrm{eq}(\pi_1, \pi_2)$.

Тогда $\alpha=\varkappa\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon\in\mathscr{C}$.

2. *Соответствие* $\alpha\mapsto(\varkappa, (\varepsilon, 1))$ *задает* $\vec{M}_e$ *как рефлексивную подкатегорию категории* $\mathscr{C}$.

Но M_e может быть незамкнутым относительно композиции и потому не быть классом инъекций обобщенной бикатегорной структуры.

Пусть $\mathscr{L}$ — класс морфизмов категории $\mathscr{C}$, содержащий U. Будем через $S(\mathscr{L})$ (соответственно $N(\mathscr{L})$) обозначать класс всех объектов категории $\vec{\mathscr{C}}$, обладающих $\vec{\mathscr{L}}$-репликой ($\vec{\mathscr{L}}$-корепликой), принадлежащей $\vec{I}$. Для каждого класса $\mathscr{P}$ морфизмов из $\mathscr{C}$ положим $S_{\mathscr{P}}(\mathscr{L})=S(\mathscr{L})\cap\mathscr{P}$.

3. $S(\mathscr{L})=\mathscr{L}^{\top}$ $N(\mathscr{L})=\mathscr{L}^{\perp}$.

4. ***Пусть категория*** $\mathscr{C}$ ***полна справа и*** $\mathscr{L}$ *— класс морфизмов из* $\mathscr{C}$, *содержащий* U. *Если* $\mathscr{C}$ $S_E(\mathscr{L})$*-колонально мала* [2, 1], *то* $(S_E(\mathscr{L}), NS_E(\mathscr{L}))$ *— правая бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$.

5. *Пусть* $\mathscr{L}$ *— класс морфизмов из* $\mathscr{C}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

а) $I\subset\mathscr{L}$;

в) $\mathscr{L}$ *замкнут относительно композиции*;

с) $\vec{\mathscr{L}}$ *— рефлексивная подкатегория в* $\vec{\mathscr{C}}$.

Тогда $(S(\mathscr{L}), \mathscr{L})$ *— обобщенная бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$.

Следствие. *Пусть в* $\mathscr{C}$ *выполнены условия* (A)—(B) *и класс* M_e *замкнут относительно композиции.*

Тогда $(S(M_e), M_e)$ *— левая бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$.

Условия а) — с) также необходимы. Таким образом, обобщенную бикатегорную структуру в $\mathscr{C}$ всегда можно задать с помощью функтора рефлексии [5] категории $\vec{\mathscr{C}}$ в ее подкатегорию $\vec{\mathscr{L}}$, где $\mathscr{L}$ удовлетворяет условиям а) — в). Если при этом $\mathscr{L}\subset M$, *то* $(S(\mathscr{L}), \mathscr{L})$ — левая бикатегорная структура в $\mathscr{C}$, если $\vec{\mathscr{L}}$ — $E\times E$-рефлексивная подкатегория [2], то $(S(\mathscr{L}), \mathscr{L})$ правая бикатегорная структура.

6. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— категория с уравнителями. При выполнении условий* а) — с) *из п. 5 следующие условия равносильны*:

1) $M_e\subset\mathscr{L}$;

2) $(S(\mathscr{L}), \mathscr{L})$ *— правая бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$.

Следствие [5]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— категория с уравнителями, удовлетворяющая условию* (A). *Если класс* M_e *замкнут относительно композиции, то* (E, M_e) *— бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$.

Из 5 и теоремы 1.2 статьи [2] следует

7. *Пусть каждое семейство объектов в* $\mathscr{C}$ ***обладает произведением,*** $(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ *— правая бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$ *и* $\mathscr{C}$ $\mathscr{P}$*-колокально мала. Пусть* $\mathscr{L}$ *— класс морфизмов из* $\mathscr{C}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $Q\subset\mathscr{L}$;

2) $\mathscr{L}$ *замкнут относительно композиции*;

3) *если* $\alpha\beta\in\mathscr{L}$, *то* $\beta\in L$;

4) *если* $\lambda_i\in\mathscr{L}$, $i\in\mathscr{I}$, *и* λ *есть произведение морфизмов* λ_i [6], *то* $\lambda\in\mathscr{L}$.

Тогда и только тогда $(S_{\mathscr{P}}(\mathscr{L}), \mathscr{L})$ *— правая бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$.

Следствие. *Пусть* $\mathscr{C}$ *полна слева и колокально мала.*

Тогда $(SN(\mathscr{K}), N(\mathscr{K}))$ — *правая бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$ *для каждого класса* $\mathscr{K}$ *эпиморфизмов, содержащего* U.

Определение. Пусть $\mathscr{L}$ — непустой класс морфизмов категории $\mathscr{C}$ и $\alpha: X \to Y$ — морфизм из $\mathscr{C}$. Морфизм λ: $Z \to Y$ из $\mathscr{L}$ называется $\mathscr{L}$-образом α и обозначается $\mathrm{im}_{\mathscr{L}}\alpha$, если:

1) $\alpha = \lambda\alpha'$ для некоторого α',

2) если $\alpha = \varkappa\beta$, где $\varkappa \in \mathscr{L}$, то существует единственное γ такое, что $\varkappa\gamma = \lambda$ и $\gamma\lambda' = \beta$.

Если $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ — обобщенная бикатегорная структура в $\mathscr{C}$, $\alpha \in \mathscr{C}$ и $\alpha = \lambda\varkappa$, где $\varkappa \in \mathscr{K}$, $\lambda \in \mathscr{L}$, то $\lambda = \mathrm{im}_{\mathscr{L}}\alpha$.

Следующее предложение является обобщением 0.3 статьи (7).

8. *Пусть* $\mathscr{C}$ — *категория с декартовыми квадратами и* $\mathscr{L}$ — *класс морфизмов из* $\mathscr{C}$, *удовлетворяющий следующим условиям*:

1) $I \subset \mathscr{L}$;

2) $\mathscr{L}$ *замкнут относительно композиции*;

3) *если* $\lambda\alpha' = \alpha\lambda'$ — *декартов квадрат и* $\lambda \in \mathscr{L}$, *то* $\lambda' \in \mathscr{L}$;

4) *каждый морфизм из* $\mathscr{C}$ *обладает* $\mathscr{L}$-*образом*.

Тогда $(S(\mathscr{L}), \mathscr{L})$ — *обобщенная бикатегорная структура в* $\mathscr{C}$, *причем функтор* $\mathrm{im}_{\mathscr{L}}$: $\vec{\mathscr{C}} \to \vec{\mathscr{L}}$, *относящий каждому морфизму из* $\mathscr{C}$ *его* $\mathscr{L}$-*образ*, *есть рефлексия* $\vec{\mathscr{C}}$ *в* $\vec{\mathscr{L}}$.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
2 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Д. А. Райков*, Изв. ВУЗ'ов, Математика, № 4 (1972). [2] *J. F. Kennison*, Ill. J. Math., v. 12, № 3 (1968). [3] *J. R. Isbell*, Canad. J. Math., v. 9, № 4 (1957). [4] *А. И. Мальцев*, ДАН, 119, № 6 (1958). [5] *M. Jurchescu, A. Lascu*, St. cerc. mat., v. 18, № 2 (1966). [6] *А. Гротендик*, О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., 1961. [7] *A. Klein*, Ill. J. Math., v. 14, № 4 (1970).