Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 2

УДК 517.512 **МАТЕМАТИКА**

В. С. ВИДЕНСКИЙ

ОБ ОДНОМ НОВОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 13 II 1974)

Вещественный метод Банга ([1], [2]) доказательства основной теоремы Карлемана о квазианалитических классах функций допускает обобщение, которое позволяет распространить теорию на некоторые новые классы функций.

Пусть $w_0=1$, $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ – положительные непрерывные на $[a, b]$ функции. Будем говорить, что функция f непрерывно дифференцируема n раз относительно последовательности $\{w_k\}$ на $[a, b]$ и писать $f\in C^n\{w_k\}$, если существуют и непрерывны

$$L_0f=f, \quad L_kf=\left(\frac{L_{k-1}f}{w_{k-1}}\right)', \quad k=1, \ldots, n.$$

Зафиксируем на $[a, b]$ точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и положим

$$\gamma_0(x)=1, \quad \gamma_k(x)=\int\limits_{x_{k-1}}^{x}\gamma_{k-1}(t)\,w_k(t)\,dt, \quad k=1, \ldots, n.$$

Если $f\in C^n\{w_k\}$, то по индукции проверяется равенство

$$f(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(L_kf)(x_n)\frac{\gamma_k(x_n)}{w_k(x_n)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}(L_kf)(t)\,\gamma_{k-1}(t)\,dt=S_n+R_n. \qquad (1)$$

Формула (1) обобщает формулу Банга, которая соответствует случаю, когда все $w_k=1$; если, кроме того, положить $x_0=x_1=\ldots=x_{n-1}$, то получаем формулу Тейлора *. Перейдем к доказательству.

При $r=1$ имеем

$$f(x_0)=f(x_1)-\int\limits_{x_0}^{x_1}f'(t)\,dt=(L_0f)(x_1)-\int\limits_{x_0}^{x_1}(L_1f)(t)\,\gamma_0(t)\,dt.$$

Допустим, что формула (1) справедлива при некотором $r<n$, и применим ее к точкам $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}$. Рассматривая последнее слагаемое в R_r и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{x_{r-1}}^{x_{r+1}}(L_rf)(t)\,\gamma_{r-1}(t)\,dt=\int\limits_{x_{r-1}}^{x}(L_rf)(t)\,\gamma_{r-1}(t)\,dt+$$

* По поводу несколько иного обобщения формулы Тейлора см. ([3]), стр. 383.

$$+\frac{(L_r f)(x_{r+1})}{w_r(x_{r+1})}\gamma_r(x_{r+1})-\int\limits_{x_r}^{x_{r+1}}(L_{r+1}f)(t)\gamma_r(t)\,dt,$$

откуда и следует формула (1) для точек $x_0, \ldots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}$.

Пусть $\{M_n\}$ — последовательность положительных чисел. Если $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{1/n}=\infty$, то, следуя ([2]), обозначим через $\{M_n^c\}$ выпуклую регуляризацию последовательности $\{M_n\}$ посредством логарифмов.

Будем называть классом $C\{w_n, M_n\}$ на $[a, b]$ множество функций из $C^\infty\{w_n\}$, удовлетворяющих на $[a, b]$ неравенствам

$$w_1(x)\ \ldots\ w_{n-1}(x)\,|(L_n f)(x)|\leqslant A^n M_n,\qquad n=1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где A — постоянная, зависящая от f.

Класс $C\{w_n; M_n\}$ будем называть квазианалитическим, если для $f\in C\{w_n; M_n\}$ на $[a, b]$ из условий

$$(L_n f)(b)=0,\qquad n=0, 1, \ldots, \tag{3}$$

следует, что f равна нулю тождественно.

В теоремах 1–4 предполагается, что $\{w_k\}$ удовлетворяет одному из двух следующих условий:

1°) каждая функция w_k является возрастающей на $[a, b]$;

2°) $\{w_k\}$ — равномерно ограничена на $[a, b]$.

Теорема 1. *Если* $\varliminf\limits_{n\to\infty}\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{1/n}<\infty$, *то класс* $C\{w_n; M_n\}$ *является квазианалитическим.*

Проведем рассуждения для случая 1°). Пусть $\{n_k\}$ — последовательность натуральных чисел, для которой $M_{n_k}<d^{n_k}n_k!$. Выберем точку x_0 по условию $0<b-x_0<d^{-1}$ и положим в формуле (1) $x_1=\ldots=x_{n_k-1}=x_0$, $x_{n_k}=b$. Если $f\in C\{w_n; M_n\}$ и удовлетворяет условию (3), то по формуле (1)

$$|f(x_0)|=|R_{n_k}|=\left|\int\limits_{x_0}^{x_{n_k}}(L_{n_k}f)(t)\,\gamma_{n_k-1}(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{x_0}^{x_{n_k}}w_1(t)\ldots w_{n_k-1}(t)\,|(L_{n_k}f)(t)|\,dt\int\limits_{x_0}^{t}dt_1\int\limits_{x_0}^{t_0}dt_2\ldots\int\limits_{x_0}^{t_{n_k-2}}dt_{n_k-1}\leqslant$$

$$\leqslant M_{n_k}\frac{(b-x_0)^{n_k}}{n_k!}<[d(b-x_0)]^{n_k}.$$

Отсюда следует, что $f(x_0)=0$, и в силу производительности x_0 имеем $f(x)=0$ при $0<b-x<d^{-1}$. Выбирая затем x_0 $(0<b-x_0<d^{-1})$ за правый конец отрезка $[x_0', x_0]$, $x_0-x_0'<d^{-1}$, заключаем, что $f(x)=0$ при $x_0-x<d^{-1}$, а значит, при $b-x<2d^{-1}$ и т. д.

Теорема 2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{1/n}=\infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}=\infty,$$

то класс $C\{w_n; M_n\}$ *является квазианалитическим.*

Эта теорема вытекает из следующего результата, который устанавливается воспроизведением рассуждений Банга (см. ([2]), гл. IV, п.2).

Теорема 3. *Если* $\{M_n\}$ *удовлетворяет условиям теоремы 2 и* $f\in C\{w_n; M_n\}$ *на* $[a, b]$, *то для любого* $x_0\in[a, b]$ *и любого* $\varepsilon>0$ *существуют натуральное число* n *и точки*

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} < x_n = b$$

такие, что

$$|R_n| < \varepsilon, \tag{5}$$

где R_n — вторая сумма в формуле (1).

Для того чтобы получить отсюда теорему 2, достаточно заметить, что при условии (3) первая сумма S_n в формуле (1) обращается в нуль и, следовательно, $f(x_0)=R_n$, откуда благодаря неравенству (5) имеем $f=0$.

Теорема 2 может быть дополнена следующим предложением относительно функций $f \in C^n\{w_k\}$, аналогичным классической теореме Бореля — Карлемана (⁴), стр. 24) для случая $f \in C^n$.

Теорема 4. *Пусть $\{M_k\}^n_{k=1}$ — возрастающая последовательность положительных чисел и пусть каждая из функций w_k, $k=1, \ldots, n$, является возрастающей на $[a, b]$, $b-a<e^{-1}$. Если не равная нулю тождественно функция $f \in C^n\{w_k\}$ на $[a, b]$ удовлетворяет условиям*

$$(L_k f)(b) = 0, \quad k=0, \ldots, n-1, \tag{6}$$

$$w_1(x) \ \ldots \ w_{k-1}(x) \, |(L_k f)(x)| \leqslant M_k, \quad k=1, \ldots, n, \tag{7}$$

то

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M_k^c}{M_{k+1}^c} \leqslant e\left(1 + \frac{M_1^c}{m_0}\right)(b-x_0), \tag{8}$$

где $m_0 = |f(x_0)| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$.

Для доказательства выбираем x_0, как указано в условии теоремы 4, применяем формулу (1) и, учитывая (7), оцениваем интегралы, входящие в R_n, по схеме Банга (²), в которой нужно положить $n_1=1$, а $n_p=n$. Это приводит, благодаря (6), к неравенству

$$m_0 = |f(x_0)| = |R_n| \leqslant M_1^c \frac{\alpha e}{1-\alpha e}, \quad \alpha = (b-x_0)\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M_k^c}{M_{k+1}^c}\right)^{-1},$$

которое эквивалентно неравенству (8).

Укажем некоторые применения предыдущих теорем к функциям бесконечно дифференцируемых в обычном смысле.

Теорема 5. *Пусть $\{\alpha_k\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных чисел, D — оператор дифференцирования*

$$H_n(D) = \prod_{k=1}^{n} (D-\alpha_k).$$

Пусть $f \in C^\infty$ на $[a, b]$ и на нем

$$|H_n(D) f| \leqslant A^n M_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{9}$$

и

$$f^{(n)}(b) = 0, \quad n=0, 1, \ldots \tag{10}$$

Если $\{M_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 или 2, то f равна нулю тождественно.

Полагаем $\beta_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$, $w_k(x) = e^{\beta_k x}$, $k=1, 2, \ldots$, $w_0(x)=1$ и, применяя соответствующие операторы L_n к функции $\varphi(x) = f(x) e^{-\alpha_1 x}$, замечаем, что

$$w_1(x) \ \ldots \ w_{n-1}(x) (L_n \varphi)(x) = (H_n(D) f)(x).$$

И так как условия (10) эквивалентны равенствам

$$(L_n \varphi)(b) = (H_n(D) f(b) = 0, \quad n=0, 1, \ldots,$$

то утверждение теоремы 5 следует из теорем 1 и 2.

Предложение, приводимое ниже, дает простые достаточные условия пустоты некоторых классов. Оно дополняет теоремы 7 и 8 С. Мандельбройта ([5], стр. 146), но носит более частный характер, чем теоремы М. М. Джрбашяна [6] и К. И. Бабенко [7].

Пусть $x=w(t)$ — возрастающая непрерывная функция на конечном промежутке $[a, b]$, отображающая его на полупрямую $[c, \infty)$. Положим

$$\varphi(t)=\int_0^t w(\tau)\,d\tau+c$$

и обозначим через φ^{-1} функцию, ей обратную.

Теорема 6. *Класс функций, бесконечно дифференцируемых на полупрямой $[c, \infty)$ и удовлетворяющих на ней условиям*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0, \quad |f^{(n)}(x)|\,w^n[\varphi^{-1}(x)]\leqslant A^n M_n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{11}$$

пуст, если $\{M_n\}$ удовлетворяет условиям теорем 1 или 2.

Полагая $w_0=1$, $w_k(t)=w(t)$, $k=1, 2, \ldots$, и применяя соответствующие операторы L_k к функции $F(t)=f[\varphi(t)]$, получаем

$$(L_0F)(t)=f[\varphi(t)], \quad (L_nF)(t)=f^{(n)}[\varphi(t)]\,w(t).$$

Отсюда, благодаря неравенствам (11), имеем

$$(L_nF)(b)=0, \quad w^{n-1}(t)\,|(L_nF)(t)|\leqslant A^n M_n,$$

т. е. выполнены условия (2) и (3), и остается воспользоваться теоремами 1 или 2.

Так, например, если $f\in C^\infty$ на $[c, \infty)$, $c>e$, и подчинена на нем условиям

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0, \quad |f^{(n)}(x)|\,[x\ln x(\ln\ln x)^2]^n\leqslant A^n M_n,$$

то f равна нулю тождественно, если $\{M_n\}$ удовлетворяет условиям теорем 1 или 2. Это соответствует выбору $x=\varphi(t)=\exp e^{-1/t}$.

Ленинградский педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступило
7 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *T. Bang*, On quasi analytiske Funktioner, These, Kyobenhavn, 1946. [2] *С. Мандельбройт*, Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, М., 1955. [3] *S. J. Karlin, W. J. Studden*, Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics, N. Y., 1966. [4] *T. Carleman*, Les fonctions quasi analytiques, Paris, 1926. [5] *С. Мандельбройт*, Теоремы замкнутости и теоремы композиции, М., 1962. [6] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. наук, т. 10, № 6, 7 (1957). [7] *К. И. Бабенко*, ДАН, т. 132, № 6, 1231 (1960).