

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, В. М. ШМИДТ

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СЛУЧАЕ  
КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ  
ПЛОСКОГО СЛОЯ**

(Представлено академиком Г. И. Петровым 15 III 1974)

Изучено нелинейное взаимодействие двух гидродинамических возмущений с различными длинами волн. Показано, что в области «жесткого» возбуждения (<sup>1-3</sup>) рассматриваемая гидродинамическая система может допускать наличие устойчивого смешанного состояния из двух возмущений с различными волновыми числами.

Рассматривается устойчивость горизонтального бесконечного слоя жидкости, ограниченного параллельными плоскостями  $z=0$  и  $z=d$  и равномерно вращающегося относительно вертикальной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Температура  $T_1$  на границах слоя фиксирована, температура на нижней границе равна  $T_0$ , на верхней —  $(T_0 - \Delta T)$ . Используются двумерные уравнения конвекции в приближении Буссинеска, записанные во вращающейся системе координат, центробежной конвективной силой пренебрегаем (<sup>4</sup>):

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + 2\Omega \times \mathbf{v} = -\rho_0^{-1} \nabla p - g\rho' / \rho_0 + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$u_x + w_z = 0, \quad (2)$$

$$\partial T / \partial t - w (\Delta T / d) + (\mathbf{v} \nabla T) = k \nabla^2 T, \quad (3)$$

$$\rho' = -\rho_0 \alpha T_2, \quad T_1 = T_0 - (\Delta T / d) z + T(x, z, t) \equiv T_0 + T_2; \quad (4)$$

здесь  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  — вектор скорости,  $\nu$  — коэффициент вязкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $k$  — коэффициент температуропроводности,  $\rho_0$  — плотность жидкости, соответствующая температуре  $T_0$ ,  $\rho'$  — изменение плотности за счет отклонения температуры от  $T_0$ .

Следуя (<sup>4</sup>), преобразуем систему (1)–(4). Введем переменные  $\eta$  и  $\psi$ :  
 $\eta = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x, \quad u = \partial \psi / \partial z, \quad w = -\partial \psi / \partial x.$

В безразмерных переменных задача сводится к изучению системы

$$\partial \eta / \partial t = J(\psi, \eta) + \sigma \tau (\partial v / \partial z) - \sigma R (\partial T / \partial x) + \sigma \nabla^2 \eta, \quad (5)$$

$$\partial v / \partial t = J(\psi, v) - \sigma \tau (\partial \psi / \partial z) + \sigma \nabla^2 v, \quad (6)$$

$$\partial T / \partial t = J(\psi, T) - \partial \psi / \partial x + \nabla^2 T, \quad (7)$$

$$\eta = \nabla^2 \psi; \quad (8)$$

здесь  $\sigma = \nu / k$  — число Прандтля,  $\tau^2 = 4\Omega^2 d^4 / \nu^2$  — число Тейлора,  $R = g\alpha \Delta T d^3 / (k\nu)$  — число Рэлея,

$$J(\psi, A) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Границы слоя будем считать изотермическими, плоскими и свободными от касательных напряжений при  $z=0$  и  $z=1$ :

$$\psi = \partial^2 \psi / \partial z^2 = T = \partial v / \partial z = 0. \quad (9)$$

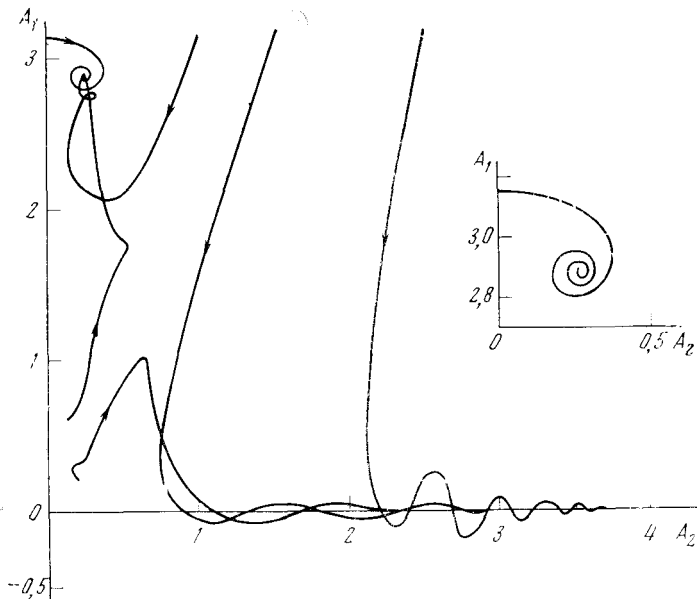


Рис. 1. Проекция на плоскость  $A_1A_2$  фазовой траектории решения при  $R=1000$ ,  $\tau=40$ ,  $\sigma=0,025$ ,  $\alpha_1=0,8$ ,  $\alpha_2=0,6$

Решение системы уравнений (5)–(8), удовлетворяющее граничным условиям (9), можно представить в виде

$$\psi = \sum_{n=1}^N \psi_n(x, t) \sin n\pi z, \quad (10)$$

$$T = \sum_{n=1}^N T_n(x, t) \sin n\pi z, \quad (11)$$

$$v = \sum_{n=0}^N v_n(x, t) \cos n\pi z. \quad (12)$$

Подставляя выражения (10)–(12) в уравнения (5)–(8) и собирая члены при  $\sin n\pi z$  и  $\cos n\pi z$ , можно выписать систему уравнений для неизвестных функций  $\psi_n$ ,  $T_n$ ,  $v_n$ . Конкретные расчеты в работе проведены для случая  $N=2$ .

Исследовалась эволюция возмущения, для которого

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1(t) \sin \pi \alpha_1 x + A_2(t) \sin \pi \alpha_2 x; \\ \psi_2 &= F_1(t) \sin 2\pi \alpha_1 x + F_2(t) \sin 2\pi \alpha_2 x + G_1(t) \sin \pi (\alpha_1 + \alpha_2) x + \\ &\quad + G_2(t) \sin \pi (\alpha_1 - \alpha_2) x; \\ v_0 &= C_1(t) \sin 2\pi \alpha_1 x + C_2(t) \sin 2\pi \alpha_2 x + \kappa_1(t) \sin \pi (\alpha_1 + \alpha_2) x + \\ &\quad + \kappa_2(t) \sin \pi (\alpha_1 - \alpha_2) x; \\ v_1 &= D_1(t) \sin \pi \alpha_1 x + D_2(t) \sin \pi \alpha_2 x; \\ v_2 &= E_1(t) \sin 2\pi \alpha_1 x + E_2(t) \sin 2\pi \alpha_2 x + J_1(t) \sin \pi (\alpha_1 + \alpha_2) x + \\ &\quad + J_2(t) \sin \pi (\alpha_1 - \alpha_2) x; \\ T_1 &= B_1(t) \cos \pi \alpha_1 x + B_2(t) \cos \pi \alpha_2 x; \\ T_2 &= C_0(t) + K_1(t) \cos 2\pi \alpha_1 x + K_2(t) \cos 2\pi \alpha_2 x + \gamma_1(t) \cos \pi (\alpha_1 + \alpha_2) x + \\ &\quad + \gamma_2 \cos \pi (\alpha_1 - \alpha_2) x. \end{aligned} \quad (13)$$

Применяя обычную процедуру подстановки (13) в уравнения для  $\psi_n, T_n, v_n$  и собирая коэффициенты при  $\sin \pi \alpha_1 x, \sin 2\pi \alpha_1 x, \cos \pi \alpha_1 x, \cos 2\pi \alpha_1 x, \sin \pi (\alpha_1 + \alpha_2) x, \sin \pi (\alpha_1 - \alpha_2) x, \cos \pi (\alpha_1 + \alpha_2) x, \cos \pi (\alpha_1 - \alpha_2) x, i=1, 2$ , а также члены, не содержащие гармоник, получим систему из 23 обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений.

Известно (5), что взаимодействие двух колебаний в области «мягкого» возбуждения приводит к подавлению одного из них. Наиболее интересный результат настоящей работы состоит в том, что в «жесткой» области возможно одновременное сосуществование двух возмущений (рис. 1). Процесс установления амплитуд носит при этом колебательный характер (6) и существенно образом зависит от начального состояния системы. Если начальные данные расположены в некоторой окрестности обычного стационарного докритического режима (4), соответствующего большому волновому числу, то образуется смешанное состояние. Если же начальные данные заключены в некоторой окрестности решения, соответствующего меньшему волновому числу, то смешанный режим не реализуется (рис. 1).

При установлении смешанного состояния, как правило, наибольшей амплитуды достигает возмущение с большим волновым числом, амплитуды боковых гармоник также могут быть весьма значительны. Например, при  $R=1000, \tau=40, \sigma=0,025, \alpha_1=0,8, \alpha_2=0,6$ , имеем

$A_1=2,90$	$A_2=0,2680$	$D_1=-0,0305$	$D_2=-0,0084$
$B_1=-0,3190$	$B_2=-0,0099$	$F_1=-0,0052$	$F_2=0,0073$
$E_1=0,0792$	$E_2=0,0762$	$K_1=0,0004$	$K_2=0,0005$
$G_1=-0,0023$	$G_2=0,1010$	$J_1=0,1490$	$J_2=-0,5690$
$\varkappa_1=0,1100$	$\varkappa_2=-1,43$	$\gamma_1=0,0006$	$\gamma_2=-0,0115$
$C_0=-0,0926$	$C_1=0,3480$	$C_2=0,2920$	

Таким образом, наиболее существенный вклад в выражение для функции тока  $\psi$  и температуры  $T$  вносят гармоники  $\sin \pi z \sin \pi \alpha_1 x$  и  $\sin \pi (\alpha_1 - \alpha_2) x$ . Отметим, что с изменением чисел Рэлея и Тейлора соотношения между амплитудами могут существенно изменяться. При малых числах Тейлора наибольшей амплитуды достигает возмущение с большим волновым числом, но с ростом числа Тейлора значения амплитуд возмущений с различными волновыми числами выравниваются (рис. 2). С уменьшением числа Рэлея амплитуда более длинной волны может значительно уменьшаться, а амплитуда более короткой волны несколько увеличиваться. Так, например, при  $\sigma=0,025, \tau=40, \alpha_1=0,8, \alpha_2=0,5$  и числе Рэлея  $R=1500$  амплитуды имеют следующие установившиеся значения:  $A_1=5,2; A_2=0,045$ , а при  $R=800$  соответственно  $A_1=1,4; A_2=0,1$ .

Время установления смешанного состояния также существенно зависит от числа Рэлея. Например, при увеличении числа Рэлея от  $R=1000$  до  $R=1200$  время установления увеличивается примерно в два раза.

Характер установившегося смешанного состояния сильно зависит от выбора волновых чисел  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В частности, при  $\tau=40, R=1000, \sigma=0,025$  и  $\alpha_1=0,8$  сближение волновых чисел приводит к резкому увеличению  $|\varkappa_2|$ ,

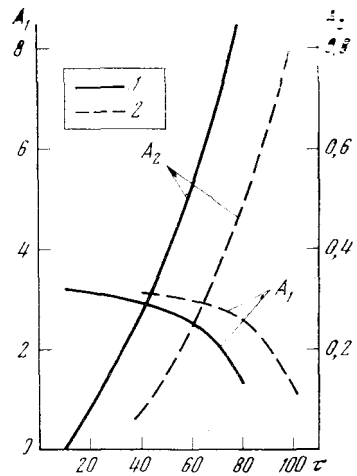


Рис. 2. Зависимость установившихся значений амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  от числа Тейлора  $\tau$  при  $R=1000, \sigma=0,025$ . 1 —  $\alpha_1=0,8; \alpha_2=0,6$ ; 2 —  $\alpha_1=0,8; \alpha_2=0,5$

при этом  $A_1$  несколько уменьшается, а  $A_2$  увеличивается. Так, при  $\alpha_2=0,5$  и  $\alpha_2=0,65$  установившиеся значения амплитуд  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\kappa_2$  равны соответственно

$$\begin{array}{lll} A_1=3,1 & A_2=0,07 & \kappa_2=-0,3 \\ A_1=2,3 & A_2=0,5 & \kappa_2=-1,6 \end{array}$$

Кроме того, образование смешанного режима возможно не при произвольных волновых числах. Как показали проведенные расчеты, при достаточно близких волновых числах ( $|\alpha_1-\alpha_2|\sim 0,05$ ) одно из возмущений подавляется. При достаточно большом различии волновых чисел также «выживает» только одно возмущение.

Отметим, что возмущения с меньшими волновыми числами, как правило, выделяются более интенсивно. Например, при  $\tau=40$ ,  $R=1000$ ,  $\sigma=0.025$  возмущения с волновыми числами  $\alpha_1=0,8$  и  $\alpha_2=0,65$  сосуществуют, но возмущение с  $\alpha_1=0,75$  подавляется возмущением с меньшим волновым числом  $\alpha_2=0,6$ .

В работе (4) показано, что в области докритической неустойчивости могут существовать возмущения, волновые числа которых заключены на некотором узком отрезке. Какое именно из допускаемых волновых чисел реализуется, не выясняется. Проведенные в настоящей работе расчеты указывают, что при малых  $\alpha$  выделяется возмущение с минимальным волновым числом.

Научно-исследовательский институт механики  
Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
21 II 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. «Наука», 1972. <sup>2</sup> А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, т. 1, «Наука», 1965. <sup>3</sup> Л. Ландау, Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, М.—Л., 1944. <sup>4</sup> G. Veronis, J. Fluid Mech., v. 24, № 3, 545 (1966). <sup>5</sup> L. A. Sigel, J. Fluid Mech., v. 14, № 1, 97 (1962). <sup>6</sup> H. T. Rossby, J. Fluid Mech., v. 36, № 2, 309 (1969).