Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 517.51 МАТЕМАТИКА

Л. В. ЖИЖИАШВИЛИ

О СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЯХ n ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 1 III 1974)

1. Точки n-мерного эвклидова пространства, $n\geqslant 1$, обозначаем так: $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ($\mathbf{x}=x$, при $n=1$), причем будем предполагать, что $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$. Затем, если $M=(1, 2, \ldots, n)$ и B — произвольное подмножество из M, то символом $\mathbf{x}_B$ обозначим те точки из R_n, у которых от нуля отличны лишь те координаты, индексы которых составляют множество B. В дальнейшем будут использованы и следующие обозначения: $R_n^0=[-\pi, \pi]^n$, $R_n^{(0,B)}=\{\mathbf{x}_B\colon |x_j|\leqslant\pi \quad \forall j\in B\}$, а $K(B)$ — число элементов множества B. Далее, если $B=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $i_j\neq i_l$, $j\neq l$, $i_k\leqslant n$, то $d\mathbf{s}_B=ds_{i_1}ds_{i_2}\ldots ds_{i_k}$.

2. Будем рассматривать 2π-периодические функции $f\colon [-\pi, \pi]^n\to R_1$. Если $f\in L(R_n^0)$, то выражение

$$\bar{f}_B(\mathbf{x})=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{K(B)}\int\limits_{R_n^{(0,B)}} f(\mathbf{x}+\mathbf{s}_B)\prod_{i\in B}\operatorname{ctg}\frac{s_i}{2}\,d\mathbf{s}_B$$

будем называть сопряженной функцией n переменных по совокупности тех переменных, индексы которых составляют множество B. Ясно, что количество всех сопряженных функций n переменных будет 2^n-1 ($\bar{f}_B(\mathbf{x})=\bar{f}(x)$ при $n=1$).

3. Хорошо известно неравенство А. Н. Колмогорова [1] для сопряженных функций одного переменного

$$\operatorname{mes}\{x:\ |\bar{f}(x)|>y>0,\ x\in R_1^0\}\leqslant\frac{A}{y}\int\limits_{R_1^0}|f(x)|\,dx,\quad A>0. \tag{1}$$

Различные проблемы, связанные с современной теорией функций многих переменных, требуют выяснения вопроса о справедливости соотношения (1) для сопряженных функций n, $n\geqslant 2$, переменных. В этом направлении, насколько нам известно, существует (при $n=2$) лишь работа Феффермана [2].

В настоящей статье подробно исследуется вопрос о справедливости неравенства (1) А. Н. Колмогорова для сопряженных функций n, $n\geqslant 2$, переменных. Приведенные результаты в определенном смысле окончательны.

4. Как было нами отмечено (см. [3], стр. 86), неравенство (1), вообще говоря, не имеет места для всех сопряженных функций n переменных, ибо некоторые из них даже не существуют. Но и существование всех сопряженных функций n переменных не гарантирует справедливости соотношения (1) для всех сопряженных функций n переменных. Точнее, справедлива

Теорема 1. *Существует $f\in L(R_n^0)$, для которой все сопряженные функции n переменных почти всюду на R_n^0 существуют, однако соотношение (1) не имеет места для тех сопряженных функций, у которых $K(B)\geqslant 2$.*

Имеет место и

Теорема 2. а) *Если*

$$|f|(\log^+|f|)^\beta \in L(R_n^0), \quad \beta \geqslant 1, \tag{2}$$

то для всех сопряженных функций n переменных $K(B)\in[1, \beta+1]$ *справедливы следующие неравенства*

$$\operatorname{mes}\{\mathrm{x}: |\tilde f_B(\mathrm{x})|>y>0,\ \mathrm{x}\in R_n^0\} \leqslant \frac{A_1}{y}\int_{R_n^0}|f(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x}, \quad K(B)=1, \quad A_1>0,$$

$$\operatorname{mes}\{\mathrm{x}: |\tilde f_B(\mathrm{x})|>y>0,\ \mathrm{x}\in R_n^0\} \leqslant \tag{3}$$

$$\leqslant \frac{A_2}{y}\left\{\int_{R_n^0}|f(\mathrm{x})|(\log^+|f(\mathrm{x})|)^{K(B)-1}\,d\mathrm{x}+1\right\}, \quad K(B)\geqslant 2, \quad A_2>0.$$

б) *Условие* (2) *не обеспечивает, вообще говоря, справедливости соотношения* (3) *для сопряженных функций n переменных с* $K(B)\in(\beta+1, n]$.

В частности, из утверждения пункта а) теоремы 2 вытекает, что если f удовлетворяет условию (2), то для всех сопряженных функций n переменных с $K(B)\in[2, \beta+1]$ справедливо соотношение

$$\operatorname{mes}\{\mathrm{x}: |\tilde f_B(\mathrm{x})|>y>0,\ \mathrm{x}\in R_n^0\} \leqslant \frac{A_3}{y}\left\{\int_{R_n^0}|f(\mathrm{x})|(\log^+|f(\mathrm{x})|)^\beta\,d\mathrm{x}+1\right\}, \quad A_3>0.$$

Тбилисский государственный
университет

Поступило
20 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. N. Kolmogoroff,* Fund. Math., v. 7, 23 (1925). [2] *Ch. Fefferman,* Stud. Math., v. 44, 1 (1972). [3] *Л. В. Жижиашвили,* УМН, т. 28, 2 (170), 65 (1973).