Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 530.12+531.51 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

О. С. ИВАНИЦКАЯ

ИНВАРИАНТЫ ЛОКАЛЬНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ ПОДГРУППЫ В ЭЙНШТЕЙНОВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

(Представлено академиком В. А. Фоком 13 XI 1973)

1. Связь координатных и локальных лоренцевых преобразований в ОТО. В эйнштейновой теории гравитации, ОТО, кроме глобального координатного расщепления, требуется, вообще говоря, и локальное расщепление пространства ОТО на 3-пространство и время в смысле СТО. Частично Эйнштейном, особенно В. А. Фоком и Г. Вейлем (спиноры в ОТО, 1929 г.) и др. введен в ОТО в общем виде конструктивный аппарат такого расщепления — тетрадный аппарат, математически разработанный еще Риччи (1895 г.), Леви — Чивита (1917 г.), Картаном (1925 г.) и др. Применительно к ОТО — это синтез аппарата локальных псевдодекартовых систем СТО с общековариантным аппаратом ОТО. Он достигается введением тетрад $h^{(\nu)}_{\mu}$ (тетрадных гравитационных потенциалов), локальной собственной группы Лоренца и шести калибровочных условий, наложенных на тетрады*. Тетрады меняются и при общем координатном преобразовании, и при локальном лоренцевом, вообще говоря, независимо от координатного. Если тетрады, исходные и преобразованные, подчинены определенным калибровочным условиям, то уравнения

$$\partial\mu x^{\nu'}\equiv P^{\nu'}{}_{\mu}=h^{\nu'}{}_{(\nu')}L^{(\nu)'}{}_{(\nu)}h_{\mu}{}^{(\nu)}, \qquad P_{\mu'}{}^{\nu}=h_{\mu'}{}^{(\mu)'}L_{(\mu)'}{}^{(\nu)}h^{\nu}{}_{(\nu)} \tag{1}$$

устанавливают связь между локальным лоренцевым преобразованием и соответствующими принятой калибровке подгруппами преобразований координатных, меняющих или сохраняющих систему отсчета.

2. «Присоединяющие» калибровочные условия. Если координатные условия фиксированы, то полное или частичное задание условий калибровочных, с последующим решением эйнштейновых уравнений тяготения, определяет полностью или частично ориентацию лоренцева орторепера $\mathbf{e}_{(\nu)}$ относительно координатных линий $\eta_{(\mu)(\nu)}=\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. В частности, для подмножества калибровочных условий, требующих для некоторых тетрадных векторов $\mathbf{e}_{(\nu)}$ ортогональности координатным линиям, т. е. требующих равенства нулю некоторых тетрад $h^{(\nu)}$, указанная ориентация одинакова во всех точках. Вследствие условия ортонормировки $\mathbf{e}_{(\nu)}$ некоторые из этих векторов оказываются касательными к координатным линиям. Такие калибровочные условия, назовем их ортогонально-присоединяющими или просто присоединяющими, весьма употребительны в тетрадной формулировке ОТО. Среди этих калибровок имеются два варианта условий, присоединяющих $\mathbf{e}_{(0)}$ (монаду) либо касательно к временной координатной линии

$$h^{(k)}_{0}=-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_{(k)}=0, \qquad h^{(0)}_{0}\neq 0, \tag{2}$$

либо ортогонально к трем пространственно-подобным

$$h^{(0)}_{k}=\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_{(0)}=0. \tag{3}$$

---

* Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3. Тетрадные, лоренцевы, индексы помещаются в скобки.

Также содержатся условия, присоединяющие триаду $\mathbf{e}_{(k)}$ ортогонально к пространственно-подобным координатным линиям. В частности,

$$h_1{}^{(2)}=-\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_{(2)}=0,\quad h_1{}^{(3)}=0,\quad h_2{}^{(3)}=0. \tag{4}$$

3. R-инварианты. Это инварианты локальной лоренцевой подгруппы пространственных (круговых) вращений. Они, вообще говоря, содержат различные типы индексов — общековариантные, временные локальные, а также локальные пространственные, полностью или частично свернутые — т. е. являются результатом полной или частичной «перелицовки» локальных компонент геометрических объектов ОТО по закону, соответствующему рассматриваемому объекту, в их общековариантные компоненты. Примеры R-инвариантов, полученных по тензорному закону:

$$h_{\mu\nu}\equiv-h_\mu{}^{(p)'}h_{\nu(p)'}=-g_{\mu\nu}+h_\mu{}^{(0)}h_{\nu(0)}=\text{inv.}, \tag{5}$$

$$dx^{(0)}\equiv d\tau=h_\mu{}^{(0)}dx^\mu,\quad \gamma_{\mu\nu}\equiv-h_\mu{}^{(a)'}h_{\nu(a)'}=h_{\mu\nu}+h_\mu{}^{(b)'}h_{\nu(b)'}=\text{inv.}, \tag{6}$$

где в (6) индекс $(a)'$ пробегает лишь два значения, а $(b)'$ — только оставшееся третье.

Примеры получения R-инвариантов по закону преобразования коэффициентов связности (частичная и полная перелицовки):

$$\Gamma^{(0)}{}_{k(0)}\equiv h_k{}^{(r)}\gamma^{(0)}{}_{(r)(0)}+\delta^{(0)}{}_{(p)}\partial_{(0)}h_k{}^{(p)}=h_k{}^{(r)}\gamma^{(0)}{}_{(r)(0)}, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\Gamma^{(0)}{}_{(kn)}\equiv h_{(k}{}^{(r)}h_{n)}{}^{(s)}\gamma^{(0)}{}_{(r)(s)},\quad \Gamma^{(0)}{}_{[kn]}\equiv h_{[k}{}^{(r)}h_{n]}{}^{(s)}\gamma^{(0)}{}_{(r)(s)}=\\ =h_{[k}{}^{(r)}h_{n]}{}^{(s)}h_\mu{}^{(0)}\partial_{(s)}h^\mu{}_{(r)},\end{gathered} \tag{8}$$

$$\Delta^k{}_{mn}=h^k{}_{(p)}h_m{}^{(r)}h_n{}^{(s)}\gamma^{(p)}{}_{(r)(s)}+h^m{}_{(p)}\partial_n h_k{}^{(p)}, \tag{9}$$

$\gamma^{(\lambda)}{}_{(\mu)(\nu)}$ — коэффициенты вращения Риччи. В зависимости от принятой калибровки R-инварианты имеют различный функциональный вид и различные численные значения.

4. Координатные аналоги R-подгруппы. «Присоединяющие» калибровки устанавливают простое соответствие лоренцевой R-подгруппы подгруппам координатных преобразований. Действительно, общие уравнения (1) при калибровках (2) и (3) соответственно принимают вид

$$P^{k'}{}_0=h^{k'}{}_{(n)'}L^{(n)'}{}_{(0)}h_0{}^{(0)},\quad P_{0'}{}^k=h_{0'}{}^{(0)'}L_{(0)'}{}^{(n)}h^k{}_{(n)}, \tag{10}$$

$$P^{0'}{}_k=h^{0'}{}_{(0)'}L^{(0)'}{}_{(n)}h_k{}^{(n)},\quad P_{k'}{}^0=h_{k'}{}^{(n)'}L_{(n)'}{}^{(0)}h^0{}_{(0)}. \tag{11}$$

Из (2) и двух первых условий (4) с учетом ортонормировки:

$$P^{2'}{}_1=h^{2'}{}_{(a)'}L^{(a)'}{}_{(1)}h_1{}^{(1)},\quad P^{3'}{}_1=h^{3'}{}_{(a)'}L^{(a)'}{}_{(1)}h_1{}^{(1)},\quad (a)=(2),\ (3). \tag{12}$$

Из (2) и (4) находим

$$P^{3'}{}_2=h^{3'}{}_{(3)'}L^{(3)'}{}_{(2)}h_2{}^{(2)}.$$

Следовательно, трехпараметрическая R-подгруппа в случаях (2) и (3) выделяет подгруппы координатных преобразований таких, что $P^{k'}{}_0=0$, $P^{0'}{}_k=0$; однопараметрическая, когда лишь $L^{(a)'}{}_b=0$, (a), $(b)=(2)$, (3), дополняет эти условия на $P^{\mu'}{}_\nu$ требованиями $P^{2'}{}_1=0$, $P^{3'}{}_1=0$.

5. Хронометрические и хроно-хорометрические аппараты ($\chi\omega\rho\alpha$-место). Независимо от тетрадного разработан метод (3+1)-расщепления, особенно А. Л. Зельмановым (1944, 1956 гг.) и др., получивший название метода хронометрических инвариантов (х.и.). Недавно в [1] завершено построение аппарата кинеметрических инвариантов (к.и.), примененного в [2], и произведено сравнение с аппаратом х.и. В [3] предложено построение других аппаратов, также исходящих из подгрупп координатных преобразований. Авторы [1-3] не уделяют внимания связи найденных ими аппаратов с аппаратом тетрадным. Цель данной статьи исходя из (1) восполнить этот пробел.

Уравнение (1) дает общий метод выделения с помощью калибровок тетрад подгрупп координатных преобразований, меняющих или сохраняющих систему отсчета. Покажем, что аппараты к.и. и предложенные в ([2], [3]) производят такое выделение в случаях калибровок (2)–(4). Известно, что аппарат х.и. – частный случай тетрадного при калибровке (2) ([4–6]). Изложенное выше подсказывает, что аппарат к.и. – частный случай тетрадного при калибровке (3). Действительно, в этом случае

$$dx^{(0)} \equiv d\tau = h_0{}^{(0)} dx^0 = dx^0/\sqrt{g^{00}}, \quad T_k{}^{(0)} \equiv \smile T_k = h_\mu{}^{(0)} T_k{}^\mu = T_k{}^0/\sqrt{g^{00}},$$

$$\smile dx^i \equiv h^i{}_{(p)} dx^{(p)} = dx^i - h^i{}_{(0)} h_0{}^{(0)} dx^0 = dx^i - g^{0i} dx^0/g^{00},$$

$$\begin{gathered} h^{ik} \equiv -h^i{}_{(p)} h^{k(p)} = -g^{ik} + \frac{g^{0i} g^{0k}}{g^{00}}, \quad \Gamma^{(0)}{}_{k(0)} = -h^0{}_{(0)} \partial_k h_0{}^{(0)} \equiv F_k = \\ = \partial_k \ln h^0{}_{(0)} = \partial_k \ln \sqrt{g^{00}}, \quad \Gamma^{(0)}{}_{(kn)} = D_{kn}, \\ \Delta^k{}_{mn} = \frac{h^{kr}}{2} (\partial_m h_{rn} + \partial_n h_{rm} - \partial_r h_{mn}). \end{gathered} \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что тогда тетрадные уравнения ОТО

$$\ddot{x}^{(\lambda)} + \gamma^{(\lambda)}{}_{(m)(n)} \dot{x}^{(m)} \dot{x}^{(n)} + 2\gamma^{(\lambda)}{}_{(0)(n)} \dot{x}^{(0)} \dot{x}^{(n)} + \gamma^{(\lambda)}{}_{(0)(0)} (\dot{x}^{(0)})^2 = 0, \tag{14}$$

$$R_{(\mu)(\nu)} = \overset{h}{R}{}^{(\lambda)}{}_{(\mu)(\lambda)(\nu)} - 2\gamma^{(\lambda)}{}_{(\mu)(\varkappa)} \Omega^{(\varkappa)}{}_{(\lambda)(\nu)} = -\varkappa \left(T_{(\mu)(\nu)} - \frac{T}{2} \eta_{(\mu)(\nu)} \right), \tag{15}$$

которые приводятся к виду, ковариантному относительно R-подгруппы, совпадают, после упрощения записи, с полученными в ([1]) уравнениями (7)–(10), (13)–(15). В частности, член в (15), содержащий объект неголономности, содержит сверток $D_{kn}D^{kn}$, тогда как $-\partial_{(0)}\gamma^{(k)}_{(0)(k)} = \smile \partial D/\partial t$. В случае (2) и двух первых калибровочных условий (4) имеем

$$g_{b0} = h_b{}^{(0)} h_{0(0)}, \quad g_{11} = (h_1{}^{(0)})^2 - (h_1{}^{(1)})^2, \quad g_{b1} = h_b{}^{(0)} h_{1(0)} + h_b{}^{(1)} h_{1(1)}. \tag{16}$$

Следовательно, K и l_b, введенные в ([3]), – не что иное как компоненты вектора $\mathbf{e}_{(1)}$ из триады в локально-безындексной записи:

$$h_1{}^{(1)} \equiv K = (h_1{}^{(0)})^2 - g_{11}, \quad h_b{}^{(1)} \equiv l_b = \frac{1}{h_1{}^{(1)}} (g_{b1} - h_b{}^{(0)} h_1{}^{(0)}), \ b = 2, 3. \tag{17}$$

6. З а к л ю ч е н и е. С помощью общего тетрадного метода приведения в соответствие подгрупп координатных преобразований локальным лоренцевым и перехода к локально-безындексной записи показано, что аппараты х.и., к.и. ([1]), х.р.и. и х.р.а.и. ([3]) содержатся в общем тетрадном аппарате как его частные случаи. Эти случаи определяются разными вариантами наиболее употребительных, «присоединяющих» калибровочных условий. Инварианты к.и., х.р.и. и другие суть инварианты и коварианты относительно локальной лоренцевой R-подгруппы для разных случаев «присоединяющих» калибровок. Эти инварианты – разного типа геометрические объекты относительно локальных лоренцевых преобразований с гиперболическими поворотами, изменяющих систему отсчета ([5], [7]). Место монадного формализма в тетрадном рассмотрено в ([8]).

Институт физики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
24 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Л. Зельманов*, ДАН, т. 209, 822 (1973). [2] *Ю. С. Владимиров, В. А. Антонов*, Препринт ИТФ-72-137Р, Киев, 1972. [3] *Ю. С. Владимиров*, Тез. докл. III Сов. грав. конфер., Ереван, 1972, стр. 29. [4] *О. С. Иваницкая*, Обобщенные преобразования Лоренца и их применение, Минск, 1969. [5] *О. С. Иваницкая*, ДАН, т. 201, 315 (1971). [6] *И. С. Сягло*, Изв. АН БССР, сер. физ. матем., № 5 (1971). [7] *Н. В. Мицкевич, В. Н. Захаров*, ДАН, т. 195, 321 (1971). [8] *О. С. Иваницкая*, Препринт ИТФ-73-88Р, Киев, 1973.