Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 517.9:533.9 **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

Ю. А. КУЗНЕЦОВ, С. Ф. МОРОЗОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КИНЕТИКИ РЕАКТОРА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 24 XII 1973)

Достаточно большой класс статических и динамических реакторных задач, заключающихся в изучении распределения плотности нейтронов и ее поведения во времени в установках, где осуществляется цепная реакция, описывается следующей системой интегродифференциальных уравнений кинетики реактора:

$$\frac{\partial N(X,v,t)}{\partial t}+(v,\nabla)N(X,v,t)+|v|\Sigma(X,v)N(X,v,t)=$$
$$=\int\limits_V \mathcal{K}(X,v,v')N(X,v',t)\,dv'+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(v)C_i(X,t)+Q(X,v,t), \qquad (1)$$
$$\frac{\partial C_i(X,t)}{\partial t}=-\lambda_i C_i(X,t)+\int\limits_V \mathcal{K}_i(X,v')N(X,v',t)\,dv', \quad i=1,\dots,m,$$

с начальными и граничными условиями

$$N(X,v,t)|_{t=+0}=g(X,v), \quad C_i(X,t)|_{t=+0}=g_i(X), \quad i=1,\dots,m, \qquad (2)$$
$$N(X,v,t)|_{X\in\Gamma}=0, \quad (n(X)\cdot v)<0, \quad t>0, \qquad (3)$$

где $\mathcal{K}_i(X,v)$, $i=1,\dots,m$,— ограниченные измеримые функции, а ядро $\mathcal{K}(X,v,v')$ имеет вид

$$\mathcal{K}(X,v,v')=\sum_{i=1}^{n}a_i(X,v')\mathcal{K}_i(v,v'), \quad 0\leqslant a_i(X,v)\leqslant A_i=\text{const}.$$

Вывод уравнений (1) и физический смысл коэффициентов и ядер см. в работах [1-3].

Обозначим $\Phi(X,v,t)=\mathrm{col}\{N(X,v,t), C_1(X,t),\dots,C_m(X,t)\}$ и представим систему (1) в операторной форме

$$\frac{\partial\Phi(X,v,t)}{\partial t}-L\Phi(X,v,t)=S\Phi(X,v,t)+Q(X,v,t), \qquad (4)$$

где L — дифференциальный оператор вида

$$L=\mathrm{diag}[-(v,\nabla)-|v|\Sigma(X,v),\ -\lambda_1,\dots,\lambda_m]=$$
$$=\mathrm{diag}[B,B_1,\dots,B_m],$$

а S — интегральный оператор

$$S=\left\|\begin{matrix} K, & \lambda_1 f_1(v),\dots,\lambda_m f_m(v)\\ K_1, & 0\quad,\dots,\quad 0\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\\ K_m, & 0\quad,\dots,\quad 0\end{matrix}\right\|,$$

где K, K_i, $i=1, \ldots, m$, обозначают интегральные операторы с ядрами $\mathscr{K}(X, v, v')$ и $\mathscr{K}_i(X, v')$, соответственно.

1. Существование и единственность решения уравнения (4), (2)–(3). Для доказательства существования и единственности решения построим C_0-полугруппу операторов $U(t)$ для оператора $A=L+S$.

Пусть G — ограниченная выпуклая область с гладкой границей Γ в трехмерном эвклидовом пространстве $E_3\{x_1, x_2, x_3\}$, $n(X)$ — внешняя нормаль в точке $X\in\Gamma$, V — ограниченная область $E_3\{v_1, v_2, v_3\}$, $0<\underline{v}\leqslant|v|\leqslant\leqslant\bar{v}<\infty$, $\bar{v}$, $\underline{v}$ — постоянные числа, $|v|=(v_1^2+v_2^2+v_3^2)^{1/2}$, Ω — совокупность всех единичных векторов s, т. е. $V=\Omega\times[\underline{v}, \bar{v}]$, и

$$0<\sigma_0\leqslant|v|\Sigma(X, v)\leqslant\Sigma_0, \quad \sigma_0=\operatorname*{vrai\,min}_{(G\times V)}|v|\Sigma(X, v).$$

Пусть, далее, D_p — класс вектор-функций $\Phi(X, v)$, обладающих следующими свойствами. 1) При почти всех $(v, Y)\in V\times\pi_v$ функция $\overline{N}(Y+s\xi, v)$, $s=v/|v|$, абсолютно непрерывна на замкнутом множестве $\pi_{Y, v}$. 2) Удовлетворяет граничным условиям $N(Y+s\xi(Y, s), v)=0$. 3) Функция $N(Y+s\xi, v)$ должна быть такова, что

$$(v, \nabla)N(X, v)\equiv|v|\frac{\partial}{\partial\xi}N(Y+s\xi, v)\in L_p(G\times V).$$

4) Функции $C_i(X)\in L_p(G)$, $i=1, \ldots, m$. Здесь использованы общепринятые обозначения работы [4]. D_p — полное нормированное пространство, всюду плотное в $\mathscr{L}_p$, где $\mathscr{L}_p$ — прямое произведение $L_p(G\times V)$ и m экземпляров $L_p(G)$, $1<p<\infty$, $D_p\subset\mathscr{L}_p$. Класс D_p является областью определения оператора L.

Рассмотрим уравнение $(\lambda I-L)\Phi=Q$, где $Q\in\mathscr{L}_p$, λ — комплексный параметр, которое в эквивалентной форме представим в виде

$$(\lambda I-B)N=Q_0, \quad (\lambda I-B_i)C_i=Q_i, \quad i=1, \ldots, m.$$

Тогда существует обратный оператор $(\lambda I-L)^{-1}$ при всех $\lambda\neq-\lambda_i$, $i=1, \ldots, m$, действующий из $\mathscr{L}_p$ в D_p, причем имеют место следующие оценки:

$$\|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda+\sigma_0}\cdot\{1-e^{-d(\operatorname{Re}\lambda+\sigma_0)}\}, & \operatorname{Re}\lambda>-\sigma_0,\\ d, \quad \operatorname{Re}\lambda=-\sigma_0, & \\ \dfrac{1}{|\operatorname{Re}\lambda+\sigma_0|}\cdot\{e^{d|\operatorname{Re}\lambda+\sigma_0|}-1\}, & \operatorname{Re}\lambda<-\sigma_0,\end{cases} \tag{5}$$

$$\|(\lambda I-B_i)^{-1}\|\leqslant\begin{cases}1/(\operatorname{Re}\lambda+\lambda_i), & \operatorname{Re}\lambda>-\lambda_i,\\ 1/|\operatorname{Re}\lambda+\lambda_i|, & \operatorname{Re}\lambda<-\lambda_i,\\ 1/|\operatorname{Im}\lambda|, & \operatorname{Re}\lambda=-\lambda_i;\end{cases} \tag{6}$$

если $\lambda=-\lambda_i$, то обратного к $(\lambda I-B_i)$ оператора не существует. Здесь $d=(\operatorname{diam} G)/\underline{v}$.

Пользуясь полученными оценками (5), (6), легко показать, что

$$\|(\lambda I-L)^{-1}\|\leqslant1/(\operatorname{Re}\lambda+\mu), \quad \operatorname{Re}\lambda>-\mu, \tag{7}$$

где $\mu=\min\{\sigma_0, \lambda_i\}$. Кроме того, из соотношения (7) следует, что оператор L замкнут.

. Таким образом, мы находимся в условиях применимости теоремы Хилле — Иосида [5–7]. Следовательно, оператор L является инфинитезимальным и порождает C_0-полугруппу операторов, явный вид которой нетрудно получить с помощью преобразования Лапласа резольвенты оператора L [5].

Пусть $f_i(v)$, $i=1,\ldots,m$, — измеримые и ограниченные неотрицательные функции, а также

$$\int_V |\mathscr{K}_i(v,v')|^\sigma dv', \quad \int_V |\mathscr{K}_i(v,v')|^\sigma dv \leqslant \text{const}, \quad \sigma>1. \tag{8}$$

Тогда оператор S ограничен из $\mathfrak{L}_p$ в $\mathfrak{L}_p$. Рассмотрим оператор A как возмущение замкнутого оператора L ограниченным оператором S. A замкнут и $D(A)=D(L)\equiv D_p$. Пользуясь теорией возмущений полугрупп операторов ([6]), получаем, что A инфинитезимальный и порождает C_0-полугруппу $U(t)$, причем

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant 1/(\operatorname{Re}\lambda+\mu-\|S\|), \quad \operatorname{Re}\lambda>\|S\|-\mu.$$

2. Дискретность спектра оператора $(L+S)$. Из оценок (5), (6) п. 1 следует, что вся комплексная плоскость, за исключением точек $\{\lambda=-\lambda_i,\ i=1,\ldots,m\}$, представляющих собой существенный спектр ([8]) $\operatorname{ess}\sigma(L)$ оператора L, является резольвентным множеством оператора $L\rho(L)$.

Рассмотрим уравнение

$$\lambda\Phi(X,v)-L\Phi(X,v)=S\Phi(X,v)+Q(X,v), \tag{9}$$

где $\Phi\in D_p$, $Q\in\mathfrak{L}_p$, $1<p<\infty$, λ — комплексный параметр. Пусть $\lambda\notin\operatorname{ess}\sigma(L)$. Тогда уравнение (9) преобразуем к виду

$$\Phi(X,v)-(\lambda I-L)^{-1}S\Phi(X,v)=(\lambda I-L)^{-1}Q. \tag{10}$$

При указанных условиях (10) эквивалентно уравнению (9), поэтому характеристика спектра (9) может быть получена из рассмотрения спектра уравнения (10). С этой целью рассмотрим оператор

$$SR_\lambda(L)S\equiv S(\lambda I-L)^{-1}S=U+V,$$

$$V=\begin{Vmatrix} W, & 0,\ldots,0 \\ 0, & 0,\ldots,0 \\ \cdots & \cdots \\ 0, & 0,\ldots,0 \end{Vmatrix}, \quad W=\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\lambda+\lambda_j} f_j(v)K_j,$$

$$U=\begin{Vmatrix} KR_\lambda(B)K, & KR_\lambda(B)\lambda_1f_1,\ldots,KR_\lambda(B)\lambda_mf_m \\ K_1R_\lambda(B)K, & K_1R_\lambda(B)\lambda_1f_1,\ldots,K_1R_\lambda(B)\lambda_mf_m \\ \cdots & \cdots \\ K_mR_\lambda(B)K, & K_mR_\lambda(B)\lambda_1f_1,\ldots,K_mR_\lambda(B)\lambda_mf_m \end{Vmatrix}.$$

С помощью замены переменных, аналогичной ([4]), можно показать, что блоки оператора U являются интегральными операторами, вид которых аналогичен виду интегрального оператора $SL^{-1}S$ работы ([4]). Используя интегральное представление оператора U, можно показать, что U вполне непрерывен из $\mathfrak{L}_p$ в $\mathfrak{L}_p$. Однако оператор V не является интегральным, поэтому оператор $SR_\lambda(L)S$, вообще говоря, не является вполне непрерывным. В связи с этим рассмотрим оператор

$$SR_\lambda(L)SR_\lambda(L)S=SR_\lambda(L)U+SR_\lambda(L)V.$$

Первое слагаемое этой суммы есть вполне непрерывный оператор (как произведение вполне непрерывного и ограниченного операторов), а второе слагаемое может быть преобразовано к виду, аналогичному виду U. Таким образом, оператор $S\{R_\lambda(L)S\}^2$, как и оператор $\{R_\lambda(L)S\}^3$, вполне непрерывен из $\mathfrak{L}_p$ в $\mathfrak{L}_p$. Используя полную непрерывность упомянутых операторов из $\mathfrak{L}_p$ и $\mathfrak{L}_p$ и лемму С. М. Никольского (([9]), стр. 204), можно показать, что оператор $\{R_\lambda(L)S\}^3$ вполне непрерывен из D_p в D_p.

Возвращаясь к уравнению (10) и замечая, что его правая часть $R_\lambda(L)Q \in D_p$, получаем, в силу ([10]), что для уравнения (10) справедлива альтернатива Фредгольма. В силу аналитичности $\{R_\lambda(L)S\}^3$ по параметру $\lambda \in \rho(L)$ из теоремы Ю. Л. Шмульяна ([11]) следует, что спектр λ дискретен, а из теоремы Н. Данфорда об отображении спектров ([12]) следует дискретность спектра оператора $(L+S)$, причем множество собственных чисел $\{\mu_j\}$ не более чем счетно, собственным числам μ_j отвечают конечномерные инвариантные подпространства $\mathfrak{M}_j$, единственными точками накопления $\{\mu_j\}$ являются точки $\operatorname{ess}\sigma(L+S)=\{\lambda=-\lambda_i,\ i=1,\ldots,m\}$ и точка $-\infty$, причем $\operatorname{Re}\mu_j \leq \|S\|-\mu$. Остальная часть комплексной плоскости есть резольвентное множество $\rho(L+S)$ оператора $(L+S)$.

3. Асимптотическое разложение. Для решения уравнения (4) можно получить асимптотическое разложение, аналогичное полученному Йоргенсом ([13]): для любого $\varepsilon>0$ существуют постоянные числа $T_M(\varepsilon)$ и $C_M(\varepsilon)$ такие, что

$$\left\| U(t)-\sum_{j=1}^{M} U(t)P_{\mu_j} \right\| \leq C_M(\varepsilon)\exp\{(-\gamma+\varepsilon)t\}$$

при $t>T_M(\varepsilon)$, где P_{μ_j} — проекционный оператор на $\mathfrak{M}_j$, $0<\gamma<\min\{\lambda_i\}$, $\mu_j \in \{-\gamma \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \|S\|-\mu\}$, $j=1,\ldots,M$.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
17 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е. Р. Коэн*, В кн. Тр. II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958, Избр. докл. иностр. ученых, т. 3, М., 1959, стр. 549. [2] *Дж. Р. Кипин*, Физические основы кинетики ядерных реакторов, М., 1967. [3] *Z. Akcasu, G. S. Lellouche, L. M. Shotkin*, Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics, N. Y.— London, 1971. [4] *В. С. Владимиров*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 61 (1961). [5] *Э. Хилле, Р. Филлипс*, Функциональный анализ и полугруппы, 1962. [6] *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов, М., 1973. [7] *С. Г. Крейн*, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. «Наука», 1967. [8] *F. E. Browder*, On the Spectral Theory of Elliptic Differential Operators, I, Math. Ann., v. 142, 22 (1961) [9] *С. М. Никольский*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [10] *С. М. Никольский*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 7, 3, 147 (1943). [11] *Ю. Л. Шмульян*, ДАН, т. 101, № 1, 35 (1955). [12] *Н. Данфорд, Д. Т. Шварц*, Линейные операторы, Общая теория, 1962. [13] *K. Jörgens*, Comm. Pure and Appl. Math., v. 11, 219 (1958).