

М. И. МОНАСТЫРСКИЙ, А. М. ПЕРЕЛОМОВ

## КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 22 II 1974)

В настоящей работе мы продолжим начатое в <sup>(1)</sup> исследование обобщенных когерентных состояний (о.к.с.), не являющихся квадратично-интегрируемыми. О.к.с., введенные в <sup>(2)</sup>, так же как и обычные когерентные состояния <sup>(3)</sup>, оказались полезными при решении ряда задач, обладающих динамической симметрией. С их помощью были решены задачи о рождении пар частиц в однородном внешнем поле <sup>(4)</sup>; когерентные состояния для группы вращений <sup>(5)</sup> применялись для оценки статистической суммы квантовой системы спинов <sup>(6)</sup> и в модели Дике <sup>(7)</sup>.

В этой заметке мы рассмотрим о.к.с., связанные с представлениями основной серии класса I. Особенно подробно будут рассмотрены о.к.с. для симметрических пространств трубчатого типа.

1. Пусть  $G$  — связная вещественная полупростая группа Ли с конечным центром. Известно <sup>(8)</sup>, что группа  $G$  обладает серией унитарных неприводимых представлений (у.н.п.) класса I, т. е. серией у.н.п., в пространстве представления которых существует вектор  $|\psi_0\rangle$ , инвариантный относительно действия максимальной компактной подгруппы  $K$ .

Рассмотрим множество состояний  $\{T(g)|\psi_0\rangle\}$ ;  $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$ . Такое состояние определяется точкой фактор-пространства  $X = G/K$  ( $X$  — симметрическое пространство некомпактного типа). Выбирая в классе  $gK$ , соответствующем точке  $x \in X$ , элемент  $g_x$ , получаем систему состояний  $\{|x\rangle\}$ :

$$|x\rangle = T(g_x)|0\rangle, \quad |0\rangle = |\psi_0\rangle. \quad (1)$$

Эту систему и назовем, следуя <sup>(2)</sup>, системой о.к.с. типа  $(T, |\psi_0\rangle)$ . У.н.п. класса I основной серии можно рассматривать как индуцированные представления. Пусть  $G = KAN$  — разложение Ивасава. Здесь  $A$  — коммутативная некомпактная подгруппа,  $N$  — максимальная нильпотентная подгруппа. Пусть  $M$  — централизатор  $A$  в  $K$ ,  $B = MAN$  подгруппа в  $G$ ,  $\Xi = B \setminus G = M \setminus K$  и  $d\mu(\xi)$  — инвариантная мера на  $\Xi$ , нормированная на единицу. У.н.п. основной серии индуцируются унитарными характеристиками  $\chi^\lambda$  подгруппы  $B$ . Для представлений класса I  $\chi^\lambda$  тривиальны на  $M$ . У.н.п. класса I можно реализовать в пространстве  $L^2(\Xi, d\mu)$ . Оператор представления  $T^\lambda(g)$  задается формулой

$$T^\lambda(g)f(\xi) = \alpha^\lambda(\xi, g)f(\xi_g), \quad (2)$$

где

$$\alpha^\lambda(\xi, g) = \left[ \frac{d\mu(\xi_g)}{d\mu(\xi)} \right]^{1/2} \chi^\lambda(a(\xi, g)), \quad (3)$$

а величины  $\xi_g$  и  $a(\xi, g)$  определяются разложением  $g_\xi g = \text{man } g_\eta$ ,  $g_\xi \in g_\eta$  — элементы классов смежности  $Bg_\xi$  и  $Bg_\eta$ ,  $\eta = \xi_g$ ,  $a = a(\xi, g)$ ;  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_p)$  — числа, задающие представление;  $p$  — ранг  $X = G/K$ .

Можно выбрать такую реализацию, что  $K$ -инвариантная функция  $\Psi_0(\xi) = 1$ . Тогда система о.к.с.  $\{(T(g) | \psi_0)\}$  имеет вид

$$T^x(g) \Psi_0(\xi) = \alpha^x(\xi, g) = \langle \xi, \lambda | x \rangle = \Psi_x^x(\xi), \quad (4)$$

где  $x$  — класс смежности, соответствующий  $g$ .

Таким образом,  $T(g) | \psi_0 \rangle$  определяется ядром  $\langle \xi, \lambda | x \rangle$ , где  $\xi \in \Xi$ ,  $x \in X$ .

**Теорема 1.** При фиксированном  $\xi \in \Xi$  ядро  $\langle \xi, \lambda | x \rangle$  постоянно на орбитах группы  $N_\xi$ , сопряженной  $N$  и оставляющей неподвижной точку  $\xi$ .

Напомним, что орбиты группы  $N_\xi$  называются орисферами. Эта теорема устанавливает связь когерентных состояний с методом орисфер<sup>(9)</sup>.

2. Рассмотрим более подробно о.к.с. для классических областей. Как известно<sup>(10)</sup>, к эрмитовым классическим неприводимым областям относятся следующие 4 серии:

- 1)  $D_{p,q}^I = SU(p, q) / SU(p) \times SU(q) \times U(1)$ ,
- 2)  $D_p^{II} = Sp(p, R) / U(p)$ ,
- 3)  $D_p^{III} = SO^*(2p, R) / U(p)$ ,
- 4)  $D_p^{IV} = SO_0(p, 2) / SO(p) \times SO(2)$

и две особые области.

Область  $D$  называется трубчатой, если она допускает реализацию

$$D = \{Z | Z = X + iY\}, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad Y \in V \subset \mathbb{R}^n,$$

$V$  — выпуклый самосопряженный аффиннооднородный конус<sup>(10)</sup>. Множество  $\{Z | Z = X, Y = 0\}$  называется остовом  $D$ .

Среди (5) трубчатыми областями являются  $D_{p,p}^I$ ,  $D_p^{II}$ ,  $D_{2p}^{III}$  и  $D_p^{IV}$ .

Пусть  $G$  — группа преобразований трубчатой области  $D$ . Такие группы возникают в ряде физических задач. Например,  $SO(p, 2)$  — группа конформных преобразований пространства Минковского с сигнатурой  $(p-1, 1)$ . Трубочатые области можно рассматривать как фазовые пространства динамических систем на конусе, а группы движений как группы симметрий соответствующих гамильтонианов.

Следующий геометрический результат справедлив для любого симметрического пространства  $G/K$ .

**Предложение 1.** Пусть  $o$  — начало координат в  $D$ ,  $\omega_0 = N \cdot o$  — орисфера, проходящая через точку  $o$ , а  $\omega$  — параллельная  $\omega_0$  орисфера (см., например, (9)), проходящая через точку  $x$ .

Тогда элемент  $a \in A$ , определяющий сложное расстояние между орисферами  $\omega_0$  и  $\omega$ , находится из формулы

$$x = a(x) n(x) \cdot o. \quad (6)$$

**Теорема 2.** Пусть  $N$  — нильпотентная подгруппа в  $G$ , действующая на  $D$ .

Тогда  $N = N_1 \square N_2$  ( $\square$  означает полупрямое произведение),  $N_1$  — нильпотентная подгруппа группы  $G$ , аффинных преобразований конуса  $V$ , а  $N_2$  — коммутативная инвариантная подгруппа сдвигов остова  $S$ .

Группа  $G_1: V \rightarrow V$ ,  $g_1: Y \rightarrow AY A^+$ , где  $Y \in V$ ,  $A^+$  — эрмитово сопряженная матрица, а  $A$  принадлежит соответственно: 1)  $SL(p, C) \times R^+$  для  $D_{p,p}^I$ , 2)  $SL(p, R) \times R^+ - D_p^{II}$ , 3)  $SU^*(2p, R) \times R^+ - D_{2p}^{III}$ , 4)  $SO(p-1, 1) \times R^+ - D_p^{IV}$  ( $R^+$  — мультипликативная группа положительных вещественных чисел). При этом произвольный элемент  $Y \in V$  однозначно представим в виде  $Y = \bar{A} Y_0 \bar{A}^+$ , где  $Y_0$  — диагональная положительно определенная матрица,  $\bar{A} \in N_1$ . Матрица  $Y_0$  и определяет функцию  $a(\xi_0, g)$ .

Опуская вычисления, приведем окончательный ответ для орисферического ядра  $\Psi_x^x(\xi_0)$ , где  $\xi_0$  — неподвижная точка группы  $N$ .

Предложение 2.

$$\langle \xi_0, \lambda | Z \rangle = \Psi_{z^\lambda}(\xi_0) = \prod_{j=1}^p y^{-\rho_j + i\lambda_j} \Psi_0(\xi g z), \quad (7)$$

где  $p$  — ранг  $D$ ,  $\rho_j = (2p - 2j + 1)$  для  $D^I$ ,  $\rho_j = (p - j + 1)$  для  $D^{II}$ ,  $\rho_j = (4p - 4j + 1)$  для  $D^{III}$ ,  $\rho_j = (p - 1, 1)$  для  $D^{IV}$ ,  $Z \in D$ ,  $\Psi_0(\xi)$  — инвариантная функция, которая в неограниченной реализации не равна тождественно единице. Общую формулу (7) легко получить из группового свойства  $\alpha^\lambda(\xi, g)$ .

Мы ограничились лишь трубчатыми областями, так как связанные с ними когерентные состояния представляют особый физический интерес.

Система о.к.с.  $\{|x\rangle\}$  обладает рядом интересных свойств. Приведем некоторые из них.

1) Система  $\{|x\rangle\}$  полна.

$$2) \quad \langle x | x \rangle = \int |\Psi_{x^\lambda}(\xi)|^2 d\mu(\xi) = 1. \quad (8)$$

3) Оператор  $T^\lambda(g)$  действует транзитивно на  $\{|x\rangle\}$ :

$$T^\lambda(g) |x\rangle = |x'\rangle, \quad x' = x_{g^{-1}}. \quad (9)$$

4) Ядра  $\Psi_{x^\lambda}(\xi)$  являются собственными функциями оператора Лапласа — Бельтрами пространства  $X$ :

$$\Delta_x \Psi_{x^\lambda}(\xi) = -(\rho^2 + \lambda^2) \Psi_{x^\lambda}(\xi); \quad (10)$$

здесь  $\rho$  — полусумма положительных корней пары  $(G, K)$  с учетом кратностей.

$$5) \quad \langle x | y \rangle = \Phi_\lambda(\tau), \quad \tau = \tau(x, y), \quad (11)$$

где  $\Phi_\lambda(\tau)$  — зональная сферическая функция Харিশ-Чандры <sup>(11)</sup>.

6) Система  $\{|x\rangle\}$  обладает важными свойствами полноты и ортогональности:

$$\int \overline{\Psi_{x^\lambda}(\xi)} \Psi_{x'^{\lambda'}}(\xi') d\mu(x) = N(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') \delta(\xi, \xi'), \quad (12)$$

$$\int \overline{\Psi_{x^\lambda}(\xi)} \Psi_{x^\lambda}(\xi) d\mu(\lambda) d\mu(\xi) = N' \delta(x, x'), \quad (13)$$

$$d\mu(\lambda) = |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad N(\lambda) = N' |c(\lambda)|^2. \quad (14)$$

Функция  $c(\lambda)$  определяет асимптотику  $\Phi_\lambda(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  и вычислена в <sup>(12)</sup>.

Используя соотношения (10), (12), (13), можно получить доказательство аналога теоремы Фату для собственных функций оператора Лапласа.

В заключение отметим, что полученные результаты справедливы для всех симметрических пространств.

Институт теоретической и  
экспериментальной физики  
Москва

Поступило  
12 II 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. М. Переломов, Preprint ITEP, № 17 (1974). <sup>2</sup> А. М. Переломов, Comm. Math. Phys., v. 26, 222 (1972). <sup>3</sup> R. J. Glauber, Phys. Rev., v. 130, 2529 (1963); v. 131, 2766 (1963). <sup>4</sup> А. М. Переломов, Теоретич. и матем. физ., т. 16, 303 (1973). <sup>5</sup> J. M. Radcliffe, J. Phys., v. A4, 313 (1971). <sup>6</sup> E. H. Lieb, Comm. Math. Phys., v. 31, 327 (1973). <sup>7</sup> E. T. Arecchi, E. Cortens et al., Phys. Rev., A6, 2211 (1972). <sup>8</sup> Дж. Макки, Математика, т. 6, 6, 57 (1962). <sup>9</sup> И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Тр. Московск. матем. общ., т. 8, 321 (1959). <sup>10</sup> И. И. Пляцкий-Шапиро, Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, М., 1961. <sup>11</sup> Harish-Chandra, Am. J. Math., v. 80, 241 (1958). <sup>12</sup> С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карпелевич, ДАН, т. 145, 252 (1962).