Доклады Академии наук СССР
1974. Том 218, № 3

УДК 517.955.213 *МАТЕМАТИКА*

Э. М. СААК

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 7 III 1974)

Теоремы об условиях разрешимости, степени недоопределенности и степени переопределенности двумерной задачи с наклонной производной изложены в монографиях ([1], [2]) (см. также ([3–5])). Эти теоремы по существу используют двойственную задачу, однако без явной ее формулировки.

Ниже формулируется двойственная задача к задаче с наклонной производной, причем сразу для многомерного случая, и дается некоторый аналог упомянутых выше теорем (теорем двойственности).

Введем следующие обозначения и определения. R^n — эвклидово пространство векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $n\geqslant 2$. Ω – область в R^n, причем нам будет удобно считать, что Ω содержит бесконечно удаленную точку ($|x|=\infty$), $W_p^{(r)}(\Omega)$ есть пополнение множества всех бесконечно гладких финитных в R^n функций $f(x)$ по норме

$$\|f\|_{r,p}=\left\{\int\limits_\Omega\sum_{|k|=1}^{r}\left|\frac{\partial^{|k|}f(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right|^p dx\right\}^{1/p},\qquad |k|=k_1+\ldots+k_n. \tag{1}$$

Через $\langle u,v\rangle$ обозначается скалярное произведение функций $u(x)$, $v(x)\in W_2^{(1)}(\Omega)$, соответствующее норме (1) при $r=1$, $p=2$:

$$\langle u,v\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx. \tag{2}$$

Через $W_q^{(-r)}(\Omega)$ обозначается негативное пространство к пространству $W^{(r)}(\Omega)$, $1<p<\infty$, $r=1,2,\ldots$, относительно скалярного произведения (2), определяемое как пополнение множества $W_p^{(r)}(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{-r,q}=\sup_{\|v\|_{r,p}}\langle u,v\rangle,\qquad 1/p+1/q=1.$$

Отметим, что $W_2^{(-1)}(\Omega)=W_2^{(1)}(\Omega)$.

Через $\overset{\Delta}{W}{}_p^{(r)}(\Omega)$ обозначается подпространство пространства $W_p^{(r)}(\Omega)$, $1<p<\infty$, $r=\pm1,\pm2,\ldots$, состоящее из гармонических в области Ω функций.

Через $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ обозначается замыкание в $W^{r)}(\Omega)$ множества всех финитных в Ω функций.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω при граничном условии $f(x)\in W_2^{(1)}(\Omega)$ определяется как проекция $Pf=P_\Omega f$ элемента f на подпространство $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$. В этом заключается целесообразность нормировки (1) ($|k|>0$) и удобство предположения $\Omega\ni\infty$.

Область Ω будем далее считать звездной и удовлетворяющей условию

$$g_\Omega(x, y) \in W_{p'}^{(r')}(\Omega) \tag{3}$$

как функция от y при всяком $x \in \Omega$. Здесь $g_\Omega(x, y)$ есть регулярная часть функции Грина задачи Дирихле в области Ω, p' и r' фиксированы, $2 \leqslant p' < \infty$, $r' \geqslant 1$.

Через $\alpha = \alpha(x)$ обозначается бесконечно гладкая в R^n, включая бесконечность, изометрическая квадратная матрица n-го порядка:

$$|\alpha(x) y| = |y| \qquad \forall x,\ y \in R^n.$$

Полагая

$$\langle u, v \rangle^{(\alpha)} = \int_\Omega \alpha \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

где ∇ — означает градиент, определяем оператор $\tilde{A}$ соотношением

$$\langle \tilde{A} u, v \rangle = \langle u, v \rangle^{(\alpha)}, \tag{4}$$

где u — фиксированный, v — произвольный элементы из $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, $\tilde{A} u \in \overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$.

Через $L_p^{(r)}(\Omega)$ обозначим пространство вектор-функций $F(x) = \{F_i(x)\}_{i=1}^n$, $F_i \in W_p^{(r)}(\Omega)$, с нормой

$$\|F\|_{r, p} = \left\{ \sum_{i=1}^n \|F_i\|_{r, p}^p \right\}^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Вместо $L_p^{(0)}(\Omega)$ будем писать $L_p(\Omega)$:

$$L_p(\Omega) = \left\{ F : \|F\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_\Omega |F_i(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty \right\}.$$

Через $L_q^{(-r)}(\Omega)$ обозначается двойственное к $L_p^{(r)}(\Omega)$ пространство относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$.

Через $\Pi = \Pi_\Omega$ обозначается ортогональный проектор пространства $L_2(\Omega)$ на его подпространство потенциальных векторов.

Если

$$\varphi(v) = \langle u, v \rangle + \int_\Omega v \Delta u \, dx, \quad u \in W_2^{(1)}(\Omega),$$

то оператор $N = N_\Omega$ определим соотношением

$$\varphi(v) = \langle v, Nu \rangle, \quad Nu \in \overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega) \quad \forall v \in \overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega).$$

Л е м м а 1. *Операторы N и $\tilde{A}$ ограничены в пространстве $W_p^{(r)}(\Omega)$, $q' \leqslant p \leqslant p'$, $-r' \leqslant r \leqslant r$.*

Л е м м а 2. *Оператор Π ограничен в пространстве $L_p^{(r-1)}(\Omega)$, $q' \leqslant p \leqslant p'$, $-r' \leqslant r \leqslant r'$.*

Эти леммы могут быть доказаны с помощью результатов работ автора ([8], [9]).

Л е м м а 3. *Область значений оператора $\tilde{A}$ в пространстве $W_p^{(r)}(\Omega)$, $1 \leqslant r \leqslant r'$, $2 \leqslant p \leqslant p'$, является замкнутой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим оператор B равенством

$$\nabla \tilde{A} u = B \nabla u \quad \forall u \in W_2^{(1)}(\Omega). \tag{5}$$

Сохраняя соотношение (5), оператор B можно продолжить на пространство $L_2(\Omega)$ с помощью равенства

$$BF = \Pi\alpha F \quad \forall F \in L_2(\Omega), \tag{6}$$

где α — оператор, отождествляемый с матрицей α. Это прямо следует из (4).

В силу (6) замкнутость области значений оператора $\tilde{A}$ в $W_p^{(r)}(\Omega)$ следует из замкнутости подпространства потенциальных векторов в $L_2(\Omega)$ и конечномерности оператора α. Лемма доказана.

Положим

$$W_2^{(1,0)}(\Omega) = \{u\colon u \in W_2^{(1)}(\Omega),\ Nu = 0\},$$

$$W_p^{(r,0)}(\Omega) = W_p^{(r)}(\Omega) \cap W_2^{(1,0)}(\Omega),$$

и обозначим через $W_q^{(-r,0)}(\Omega)$ пополнение множества $W_p^{(r,0)}(\Omega)$ по норме пространства $W_q^{(-r)}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$.

Согласно работе автора [9], разумным обобщением классической задачи с наклонной производной в области Ω

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial l} = \tilde{\varphi}(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{7}$$

служит задача

$$\varphi(v) = \langle v, N\tilde{A}u\rangle, \tag{8}$$

где v — произвольный, u — искомый элементы из $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, а $\varphi(v)$ — линейный функционал над пространством $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, порождаемый граничным условием $\tilde{\varphi}(x)$ по формуле

$$\varphi(v) = \int_{\partial\Omega} v(x)\tilde{\varphi}(x)\, d\sigma,$$

если граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая; здесь $d\sigma$ есть элемент поверхности $\partial\Omega$.

Матрица α, неявно фигурирующая в задаче (8), связана с вектором l из задачи (7) соотношением

$$l = \alpha^*\nu, \quad \partial/\partial l = l\cdot\nabla,$$

где α^* — транспонированная матрица к матрице α, а ν — направляющий вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω.

Из теоремы 1 вытекает, что двойственной задачей к задаче (8) служит задача

$$\psi(v) = \langle v, N\tilde{A}^*u\rangle, \tag{9}$$

где оператор $\tilde{A}^*$ порождается матрицей α^* по аналогии с формулой (4). Таким образом, мы должны считать «двойственными» векторные поля $l=\alpha^*\nu$ и $l^*=\alpha\nu$.

Теорема 1. *Пусть $N^{(r)}(N\tilde{A})$ есть ядро оператора $N\tilde{A}$ в пространстве $\overset{\Delta}{W}{}_p^{(r)}(\Omega)$, $2\leq p\leq p'$, $1\leq r\leq r'$. Пусть $N_q^{(-r)}[(N\tilde{A})^*]$ есть коядро этого же оператора (т. е. ядро сопряженного оператора $(N\tilde{A})^*$ в двойственном пространстве $\overset{\Delta}{W}{}_q^{(-r)}(\Omega)$, $1/p+1/q=1$).*

Тогда справедливы формулы

$$N_p^{(r)}(N\tilde{A}) = \{u\colon \nabla^{-1}\Pi\alpha\nabla u \in W_p^{(r,0)}(\Omega)\}, \tag{10}$$

$$N_q^{(-r)}[(N\tilde{A})^*]=\{u\colon \nabla^{-1}\Pi\alpha^*\nabla u\in W_q^{(-r,0)}(\Omega)\},\tag{11}$$

где элементы и принадлежат соответствующим пространствам ($\overset{\Delta}{W}{}_p^{(r)}(\Omega)$ *и* $\overset{\Delta}{W}{}_q^{(-r)}(\Omega)$), *а* ∇^{-1} *есть оператор, сопоставляющий вектору* ∇ *и его потенциал* u.

Доказательство следует из формул (5), (6), (8).

Теорема 2. *Пусть* $[\overset{\Delta}{W}{}_q^{(-r}(\Omega)]^*$ *есть сопряженное пространство к пространству* $\overset{\Delta}{W}{}_q^{(r)}(\Omega)$ *и пусть* $\varphi\in[\overset{\Delta}{W}{}^{(-r)}(\Omega)]^*$.

Для разрешимости задачи (8) *в классе* $\overset{\Delta}{W}{}_p^{(r)}(\Omega)$ *необходимо и достаточно, чтобы функционал* φ *был ортогонален всем решениям однородной двойственной задачи* (9) ($\psi=0$):

$$\varphi(v)=0\quad \forall v\in N_q^{(-r)}[(N\tilde{A})^*].$$

Доказательство следует из леммы 3 и теоремы 1.

Теорема 3. *Для разрешимости задачи* (8) *в классе* $\overset{\Delta}{W}{}_p^{(r}(\Omega)$ *при любом* $\varphi\in[\overset{\Delta}{W}{}_q^{(-r)}(\Omega)]^*$ *необходимо и достаточно, чтобы однородная двойственная задача* (9) (*где* $\psi=0$) *имела лишь тривиальное решение:*

$$N_q^{(-r)}[(N\tilde{A})^*]=\{0\}.\tag{12}$$

Как показано в работе автора ([9]), условие (12) выполняется, если $\alpha x\cdot x\neq 0\quad \forall x\neq 0$.

Отметим также, что многомерной задаче с наклонной производной посвящены работы ([6], [7]) и другие.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило 20 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа,* Обобщенные аналитические функции, М.– Л., 1959. [2] *А. В. Бицадзе,* Краевые задачи для эллиптических уравнений 2-го порядка, «Наука», 1966. [3] *А. В. Бицадзе,* Тр. симпозиума, посвященные 60-летию академика С. Л. Соболева, «Наука», 1970, стр. 64. [4] *C. Jacob,* Math. Soc. Roumaine Sci., v. 42, 9 (1940). [5] *L. Hörmander,* Ann. Math., v. 83, № 1, 51 (1966). [6] *В. Г. Мазья,* Матем. сборн., т. 87, № 129, 3, 417 (1972). [7] *А. Янушкаускас,* ДАН, т. 208, № 3, 555 (1973). [8] *Э. М. Саак,* ДАН, т. 211, № 5 (1973). [9] *Э. М. Саак,* ДАН, т. 215, № 4 (1974).