Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 518 : 512 *МАТЕМАТИКА*

Н. В. ЕМЕЛИН, М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, Н. П. ПАНСКИХ

СПУРТ-МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 IV 1974)

Предлагается и изучается новая процедура построения последовательных приближений к решению линейных уравнений, основанная на идеях теории систем с переменной структурой.

1. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Bx=b \tag{1}$$

с симметричной положительно определенной матрицей B порядка m. Для отыскания приближенных решений систем (1) могут быть использованы различные итерационные процедуры. Как правило, приближение x_{n+1} находится по предыдущему приближению x_n при помощи равенства

$$x_{n+1}=x_n-\alpha Bx_n+\alpha b, \tag{2}$$

где α — некоторый скаляр.

Если α одно и то же для всех n, то формулы (2) описывают метод обычных последовательных приближений; для его сходимости достаточно, чтобы α было положительно и достаточно мало. Достоинства метода обычных последовательных приближений — простота реализации и устойчивость по отношению к случайным ошибкам. К числу недостатков можно отнести медленную сходимость приближений к решениям уравнений с плохо обусловленными матрицами B.

Число α может быть различным при разных n; например, оно может определяться по вектору x_n или по векторам x_n и x_{n-1} и т. д. Такие нелинейные схемы — это итерационные процедуры с обратной связью. К ним относятся, например, методы скорейшего спуска и минимальных невязок (см. ([1], [2])). Подобные методы сходятся быстрее метода обычных последовательных приближений, их недостаток — повышенная чувствительность к ошибкам округления.

Третья группа методов использует существование асимптотических направлений сходимости (см., например, ([3])) методов первых двух групп. В этих методах несколько итераций ищется методом обычных последовательных приближений или каким-либо другим, а для отыскания последующей итерации применяется формула (2), в которой α выбирается в соответствии с известными приемами ускорения сходимости, предложенными Л. А. Люстерником и А. А. Абрамовым ([4], [5]). Сложностью реализации таких методов является отсутствие четких указаний для выбора тех номеров итераций, уточнение которых целесообразно проводить по формулам ускорения сходимости.

Многие методы второй и третьей группы тесно связаны между собой; методы третьей группы, построенные на базе идеи ускорения сходимости, могут совпадать с методами скорейшего спуска или минимальных невязок (ср. ([6])).

В настоящей работе обсуждается итерационная процедура, при построении которой авторы, отправляясь от идей теории систем с переменной структурой (см. [7])), пытались использовать особенности описанных выше групп методов. Параметру α в формулах (2) разрешаются лишь два значения; моменты перехода ко второму значению параметра определяются по некоторым характеристикам двух предыдущих приближений; эти характеристики отражают близость вектора невязки к асимптотическим направлениям сходимости.

2. Пусть число γ выбрано так, чтобы матрица $I-\gamma B$ была неотрицательно определена и ее спектральный радиус был меньше единицы. Ниже использованы обозначения $r(x)=Bx-b$, $|r(x)|$ — эвклидова норма вектора $r(x)$.

Зададимся двумя неотрицательными числами δ и q. Положим $A_\alpha(x)=x-\alpha Bx+\alpha b$, $\alpha=\gamma, \delta$.

Выберем начальное приближение y_0 и определим приближения y_{n+1} по следующему правилу:

$$y_{n+1}=\begin{cases} A_\gamma(y_n), & \text{если либо } n=0, \text{ либо } y_n=A_\delta(y_{n-1}), \text{ либо } \\ & |r(y_n)|/|r(y_{n-1})|<q; \\ A_\delta(y_n), & \text{если } n>0,\ y_n=A_\gamma(y_{n-1}) \text{ и } |r(y_n)|/|r(y_{n-1})|\geqslant q. \end{cases} \tag{3}$$

Алгоритм, определенный соотношениями (3), будем называть *спурт-методом*. Приближение y_n назовем *γ-итерацией*, если $y_n=A_\gamma(y_{n-1})$, и *δ-итерацией*, если $y_n=A_\delta(y_{n-1})$. Из построения алгоритма следует, что приближение y_1 — γ-итерация; после δ-итерации всегда следует γ-итерация.

При помощи алгоритма (3) были проведены экспериментальные вычисления приближенных решений ряда систем (1) при различных γ, δ и q. Было замечено, что средняя частота появления δ-итераций при одном и том же значении δ практически не зависит от значений параметра q в некотором диапазоне. Если параметр q выбирать слишком большим, то все приближения y_n оказываются γ-итерациями и спурт-метод сводится к методу обычных последовательных приближений; если параметр q слишком мал, то приближения (3) расходятся.

Экспериментальный факт «стабилизации» частоты появления δ-итераций получил теоретическое обоснование. Полученная при этом теорема позволяет оценить быстроту сходимости спурт-метода.

3. Обозначим через μ_i, $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\ldots\leqslant\mu_m=\|B\|$, собственные числа матрицы B, через e_i — соответствующие им собственные векторы. Положим $k(\delta)$ равным наименьшему из номеров собственных чисел μ_i, больших $2/\delta-\mu_1$, если такие существуют, и равным $m+1$ в противном случае. Положим $\varphi_i=(\ln|1-\delta\mu_i|-\ln|1-\delta\mu_1|)/(\ln|1-\gamma\mu_1|-\ln|1-\gamma\mu_i|)$ и пусть $\varphi_\infty=\max\{1, \varphi_i: (y_0, e_i)\neq(B^{-1}b, e_i), i\geqslant k(\delta)\}$.

Пусть сделано n шагов вычислений по формулам (3). В процессе вычислений γ-итерации находились $\Gamma(n)$ раз и δ-итерации — $\Delta(n)$ раз; $\Gamma(n)+\Delta(n)=n$.

Теорема 1. *Пусть начальное приближение y_0 таково, что*

$$(y_0, e_1)\neq(B^{-1}b, e_1), \tag{4}$$

и пусть параметры δ и q удовлетворяют соотношениям

$$0<1-\gamma(2/\delta-\mu_1)<q<1-\gamma\mu_1. \tag{5}$$

Тогда выполнено неравенство

$$\sup_n|\Gamma(n)-\varphi_\infty\Delta(n)|<\infty. \tag{6}$$

Условие (4) выполнено при почти всех y_0 (оно не является фактически ограничением).

Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Из теоремы 1 следует, что при всех достаточно больших p справедливо неравенство

$$\left| \frac{\Gamma(n+p)-\Gamma(n)}{\Delta(n+p)-\Delta(n)} - \varphi_\infty \right| \leqslant \varepsilon, \quad n=0,1,2,\ldots; \quad p \geqslant p(\varepsilon).$$

Таким образом, отношение $\Gamma(n)/\Delta(n) \to \varphi_\infty$ при $n \to \infty$.

Число φ_∞ будем называть предельной скважностью последовательности приближений y_n. Подчеркнем, что подсчитанная при одном и том же начальном приближении y_0 и фиксированном значении δ предельная скважность не зависит от допустимых в условии теоремы 1 значений q.

Положим

$$\lambda_{эф} = [(1-\gamma\mu_1)^{\varphi_\infty}(1-\delta\mu_1)]^{1/(1+\varphi_\infty)}.$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 последовательные приближения* (3) *сходятся к точному решению уравнения* (1). *При этом выполнены неравенства*

$$c\lambda_{эф}^n |y_0 - B^{-1}b| \leqslant |y_n - B^{-1}b| \leqslant d\lambda_{эф}^n |y_0 - B^{-1}b|, \qquad (7)$$

где положительные числа c и d зависят от y_0.

Неравенства (7) показывают, что в условиях теоремы 1 приближения y_n сходятся к $B^{-1}b$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\lambda_{эф}$. Этот знаменатель не зависит от допустимых значений q. Выбор q в пределах от $1-\gamma(2/\delta-\mu_1)$ до $1-\gamma\mu_1$ влияет только на значения чисел c и d. Как показывает опыт вычислений, q следует выбирать по возможности ближе к нижней границе.

Точное выражение для $\lambda_{эф}$ требует полной информации о спектре матрицы B и пользоваться им затруднительно. В связи с этим укажем простые оценки этого числа. Положим

$$\lambda(\varphi) = [(1-\gamma\mu_1)^\varphi (1-\delta\mu_1)]^{1/(1+\varphi)}.$$

Из определения следует равенство $\lambda_{эф} = \lambda(\varphi_\infty)$. Если параметр δ удовлетворяет (5), то $\lambda(\varphi)$ монотонно возрастает и для оценки $\lambda_{эф}$ достаточно установить оценку предельной скважности φ_∞.

Уравнение

$$\delta \left[\frac{(\delta-\gamma)\varphi}{\delta(1+\varphi)} \right]^{1+\varphi} - \gamma\varphi(1-\delta\mu_1)(1-\gamma\mu_1)^\varphi = 0 \qquad (8)$$

имеет единственный положительный корень ξ; положим $\psi_\infty = \max\{1, \xi\}$. Так как $\varphi_\infty \leqslant \psi_\infty$, то $\lambda_{эф} \leqslant \lambda(\psi_\infty)$. Из уравнения (8) видно, что при заданных γ и μ_1 число ψ_∞ зависит только от величины $(\delta-\gamma)/[\delta(1-\gamma\mu_1)]$. Ниже приведены приближенные значения ψ_∞ для различных значений этого выражения:

$(\delta-\gamma)/[\delta(1-\gamma\mu_1)]$	0,85	0,87	0,89	0,91	0,93	0,95	0,97
ψ_∞	1,2	1,5	1,9	2,5	3,4	4,9	8,6

Для обеспечения по возможности более быстрой сходимости спуртметода естественно выбирать параметр δ так, чтобы $\lambda(\psi_\infty)$ было минимальным. В явном виде эта задача не решена. В табл. 1 приведены приближенные значения $(\delta/\gamma)_{опт}$ для различных $\gamma\mu_1$:

Таблица 1

$1-\gamma\mu_1$	$(\delta/\gamma)_{опт}$	ψ_∞	$\lambda(\psi_\infty)$	$\frac{1-\lambda(\psi_\infty)}{\gamma\mu_1}$	$1-\gamma\mu_1$	$(\delta/\gamma)_{опт}$	ψ_∞	$\lambda(\psi_\infty)$	$\frac{1-\lambda(\psi_\infty)}{\gamma\mu_1}$
0,80	3,1	1,2	0,57	2,1	0,93	6,2	2,1	0,80	2,9
0,83	3,6	1,4	0,61	2,3	0,95	7,1	2,5	0,84	3,2
0,86	4,0	1,5	0,66	2,4	0,97	10	3,2	0,90	3,3
0,89	4,5	1,7	0,71	2,6	0,98	12	3,9	0,93	3,5
0,91	5,3	1,9	0,75	2,8	0,99	20	6,3	0,96	4,0

4. Для разумного выбора параметров спурт-метода следует до начала вычислений найти верхние оценки μ_1^+ и μ_m^+ собственных чисел μ_1 и μ_m матрицы B (это не вызывает затруднений). Параметр γ можно положить равным $(\mu_m^+)^{-1}$, а параметр δ выбрать из табл. 1 по величине $\gamma\mu_1^+$. Наконец, параметр q можно положить равным $1-2\gamma/\delta+\gamma\mu_1^+$.

Если число μ_1 оценено грубо, то для оценки эффективности спурт-метода полезны предельные значения величины $k_{эф}=(1-\lambda_{эф})/\gamma\mu_1$ при разных δ. Грубо говоря, при использовании спурт-метода необходимое для достижения заданной точности число итераций в $k_{эф}$ раз меньше, чем при использовании метода обычных последовательных приближений. Зафиксируем параметр δ. Положим $k_*=\lim\limits_{\mu_1\to 0}(1-\lambda\psi_\infty)/\gamma\mu_1$. Величину k_* можно рассматривать как асимптотическую оценку (при $\mu_m=\gamma^{-1}$ и $\mu_1\to 0$) величины $k_{эф}$. Пусть $\delta/\gamma>3+2\sqrt{2}$. Тогда

$$k_*=\frac{\gamma\psi_*+\delta}{\gamma(1+\psi_*)},\tag{9}$$

где ψ_* — корень уравнения

$$\delta\left[\frac{(\delta-\gamma)\varphi}{\delta(1+\varphi)}\right]^{1+\varphi}-\gamma\varphi=0.\tag{10}$$

Ниже приведены приближенные значения k_* при различных δ/γ:

δ/γ	3	4	5	6	8	10	12
k_*	3,0	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9

С увеличением этого отношения k_* возрастает. Справедливо равенство $\lim\limits_{\delta\to\infty}k_*=1+u^{-1}$ ($\approx 4{,}59$), где u — корень уравнения $1+u+\ln u=0$.

5. При значениях параметров δ и q, удовлетворяющих (5), спурт-метод сходится быстрее метода обычных последовательных приближений. При близких к оптимальным значениям δ приближения спурт-метода в ряде просчитанных примеров сходились быстрее, чем приближения метода скорейшего спуска.

Средняя скважность $\Gamma(n)/\Delta(n)$ сходится к пределу, который практически не зависит от параметра q. На первый взгляд, наличие обратной связи через этот параметр не слишком оправдано. Метод, в котором γ-итерации и δ-итерации принудительно чередуются со скважностью ψ_∞, кажется проще. (Отметим, что такой метод близок к схемам, предложенным в ([8]).) Однако скорость сходимости этой модификации определяется верхними оценками $\lambda_{эф}$. Как правило, приближения спурт-метода сходятся быстрее; в ряде случаев это различие весьма существенно.

6. В качестве формул ускорения сходимости (δ-формул) в спурт-методе можно применить, например, формулы метода скорейшего спуска. Спурт-метод с использованием этих формул применялся для решения нескольких уравнений вида (1) с матрицами 10-го порядка. Сходимость приближений оказалась более быстрой, чем при использовании спурт-метода (3). Однако устойчивость к ошибкам округления заметно снизилась.

Институт проблем управления
Москва

Поступило
1 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. В. Канторович*, ДАН, т. 56, № 3 (1947). [2] *М. А. Красносельский, С. Г. Крейн*, УМН, т. 5, в. 3 (1950). [3] *H. Akaike*, Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, v. 11 (1959). [4] *Л. А. Люстерник*, Тр. Матем. инст. АН СССР, т. 20 (1947). [5] *А. А. Абрамов*, ДАН, т. 74, № 6 (1950). [6] *A. Jennings*, J. Inst. Math. Appl., № 8 (1971). [7] *С. В. Емельянов и др.*, Теория систем с переменной структурой, «Наука», 1970. [8] *М. К. Гавурин*, УМН, т. 5, в. 3 (1950).