Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 517.947 *МАТЕМАТИКА*

А. А. АРСЕНЬЕВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕЗОНАНСНЫХ ПОЛЮСОВ И РЕЗОНАНСОВ ПРИ РАССЕЯНИИ В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 6 VI 1974)

1. Рассмотрим рассеяние плоской волны на теле, которое содержит «ловушку» (см. рис. 1). Неоднократно высказывалось предположение, что решение задачи рассеяния на таком теле имеет резонансный характер, а у матрицы рассеяния в окрестности собственных частот полости есть полюсы с малыми мнимыми частями. В случае краевых условий первого рода соответствующие утверждения доказаны в ([1], [2]), однако приведенное там доказательство существенно использовало принцип максимума и не распространялось непосредственно на случай краевых условий второго и третьего рода. Привлекая некоторые дополнительные соображения и методы работ ([1], [2]), мы получим здесь оценки мнимой части резонансного полюса и амплитуды в резонансе через геометрические параметры области.

2. Сформулируем один вспомогательный результат. Пусть D — открытая связная область в n-мерном эвклидовом пространстве R_n, $n\geqslant 3$, границу ∂D области D мы будем предполагать гладкой* и будем также предполагать, что область D либо ограничена, либо содержит внешность шара.

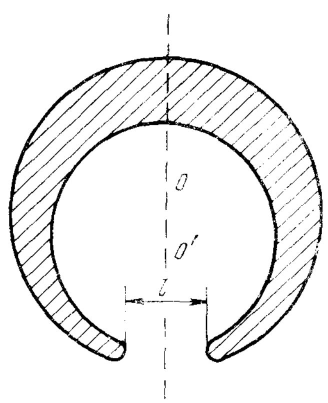

Рис. 1

Пусть $N(x, y)$ — функция Грина следующей задачи:

$$(\Delta_x-1)N(x, y)=-\delta(x-y),\quad x, y\in D,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}-\beta(x)\right)N(x, y)=0,\quad x\in\partial D,\quad y\in D,$$

n — внутренняя по отношению к D нормаль и $\beta(x)\geqslant 0$. Пусть S — измеримое подмножество на ∂D. Положим **

$$\mathcal{T}(D, S, \beta)=\inf_{x\in S}\int\limits_S N(x, y)\,d_yS.$$

Определение. Последовательность областей $S_m\subset\partial D$ правильно стягивается в точку $x_0\in D$, если $S_{m+1}\subset S_m$ и существует такая константа $\alpha>0$ и такая последовательность шаров $B(x_0, r_m)$ (x_0 — центр, r_m — радиус), что

$$B(x_0, r_{2m+1})\subset S_m\subset B(x_0, r_{2m}),\quad r_m\to 0,\quad r_{2m+1}/r_{2m}=\alpha$$

(включения строгие).

* Мы называем границу гладкой, если она компактна и дважды непрерывно дифференцируема.

** Заметим, что $N(x, y)\geqslant c|x-y|^{2-n}$, $x, y\in\partial D$, $c>0$.

Лемма 1. *Если последовательность областей* $\{S_m\}$ *правильно стягивается в точку, то*

$$\operatorname{mes}_{n-1} S_m / \mathcal{T}(D, S_m, \beta) \to 0, \quad m \to \infty.$$

3. Пусть Ω^1 — замкнутая ограниченная область в R_n с гладкой границей $\partial\Omega^1$, на которой задана неотрицательная непрерывная по Гёльдеру функция $\beta(x)$. Пусть Ω^3 — связная компонента множества $R_n \setminus \Omega^1$, содержащая бесконечно удаленную точку, а $\Omega^2 = R_n \setminus (\Omega^1 \cup \Omega^2)$. Предположим, что область Ω^2 связна и $\operatorname{mes}_n \Omega^2 > 0$. Пусть Ω_m — последовательность областей с гладкими границами, удовлетворяющая условиям: каждая из областей Ω_m имеет связное дополнение, $\Omega_q \supset \Omega_p$ при $q > p$, замыкание объединения областей Ω_m совпадает с Ω_1,

$$\operatorname{mes}_{n-1} (\partial\Omega^1 \setminus \partial\Omega_m) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Для удобства мы в дальнейшем будем опускать индекс m и будем считать, что область Ω изменяется так, что совпадает последовательно с элементами семейства $\{\Omega_m\}$, причем

$$\begin{aligned} d(\Omega) \equiv \operatorname{mes}_n (\Omega^1 \setminus \Omega) + \\ + \operatorname{mes}_{n-1} (\partial\Omega^2 \setminus \partial\Omega) / \mathcal{T}(\Omega^2, \partial\Omega^2 \setminus \partial\Omega, \beta) + \\ + \operatorname{mes}_{n-1} (\partial\Omega^3 \setminus \partial\Omega) / \mathcal{T}(\Omega^3, \partial\Omega^3 \setminus \partial\Omega, \beta) \to 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(входящая в определение $d(\Omega)$ функция $\beta(x)$ является сужением на $\partial\Omega^2$ и $\partial\Omega^3$ функции $\beta(x)$, заданной на $\partial\Omega^1$).

В силу леммы 1 для выполнения соотношения (1) достаточно, чтобы области $\partial\Omega^2 \setminus \partial\Omega$ и $\partial\Omega^3 \setminus \partial\Omega$ правильно стягивались в точки и $\operatorname{mes}_n (\Omega^1 \setminus \Omega) \to 0$.

Определение. Решением задачи рассеяния для области Ω мы называем решение внешней краевой задачи

$$\begin{gathered} -\Delta u = \lambda u, \quad x \in R_n \setminus \Omega; \quad u = \exp(i\sqrt{\lambda}(n, x)) + \varphi(x, n, \sqrt{\lambda}); \quad |n| = 1; \\ \lambda \in (0, \infty); \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} - \beta(x)\right) u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \\ \varphi(x, n, \sqrt{\lambda}) = O(|x|^{(1-n)/2}); \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{\lambda}\right) \varphi(x, n, \sqrt{\lambda}) = o(|x|^{(1-n)/2}). \end{gathered} \tag{2}$$

Функция $\beta(x)$ в (2) неотрицательна, непрерывна по Гёльдеру и совпадает на $\partial\Omega^1 \cap \partial\Omega$ с определенной выше на $\partial\Omega^1$ функцией $\beta(x)$.

В дальнейшем нам будет удобно считать, что функция $u(x, n, \sqrt{\lambda})$ доопределена нулем на область Ω. Символом u_{out} обозначим решение задачи рассеяния для области Ω^1, продолженное нулем на $\Omega^1 \cup \Omega^2$.

Пусть H_γ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_\gamma = \int f^*(x) g(x) \exp(-\gamma |x|)\, dx,$$

причем число γ выбрано достаточно большим.

Известно, что решение задачи рассеяния, рассматриваемое как элемент пространства H_γ, аналитично по λ в плоскости с разрезом вдоль прямой $\lambda \geqslant 0$ и имеет мероморфное продолжение через этот разрез в нижнюю и верхнюю полуплоскости, мы будем отмечать эти продолжения индексами $+$ и $-$.

Пусть $\lambda_j>0$ — простое собственное значение задачи

$$-\Delta\psi(x,\ \lambda_j)=\lambda_j\psi(x,\ \lambda_j),\quad x\in\Omega^2,$$
$$(\partial/\partial n-\beta(x))\psi(x,\ \lambda_j)=0,\quad x\in\partial\Omega^2,\quad \beta(x)\geqslant 0,$$

n — внутренняя к Ω^2 нормаль, $\psi(x,\ \lambda_j)$ — соответствующая собственная функция.

Основной результат работы сформулирован в теореме 1.

Теорема 1. I. *Существуют такие зависящие только от области* Ω^1 *и числа* λ_j *положительные константы* C_i, $1\leqslant i\leqslant 4$, *что при* $d(\Omega)<C_1$ *в круге* $|\lambda-\lambda_j|<C_2$ *у функции* $u_\pm(\cdot,\ \sqrt{\lambda})$ *есть точно одна особая точка: полюс первого порядка* $\lambda_j^\pm(\Omega)$, *причем* $|\lambda_j-\lambda_j^\pm(\Omega)|<C_3 d(\Omega)^{1/2}$ *и* $|\operatorname{Im}\lambda_j^\pm(\Omega)|<$ $<C_4 d(\Omega)$.

II. *При* $d(\Omega)<C_1$ *и* $|\lambda-\lambda_j|<C_2$ *функция* $u_\pm(\cdot,\ \sqrt{\lambda})$ *представима в виде*

$$u_\pm(x,\ n,\ \sqrt{\lambda})=\exp(i(n,\ x)\sqrt{\lambda})+\varphi_j^\pm(x,\ \Omega)\,\omega_j^\pm(n,\ \lambda,\ \Omega)+s_j(n,\ \lambda,\ \Omega)(x),$$

где $\omega_j^\pm(n,\ \lambda,\ \Omega)=(\lambda-\lambda_j^\pm(\Omega))^{-1}e_j^\pm(n,\ \Omega)$ *и введенные функции обладают следующими свойствами:*

1) $\|u_{\text{out}}-(\exp(i(n,x)\sqrt{\lambda})+s_j(n,\lambda,\Omega)(x)\|_\gamma\to 0,\quad d(\Omega)\to 0;$

2) $(2\pi)^{-N}\displaystyle\int\limits_{|k^2-\lambda_j|<\sigma(\Omega)}|\omega_j^\pm(k,\Omega)|^2dk\to 0,\ k=n\sqrt{\lambda},$ *если* $d(\Omega)\to 0,\ \sigma(\Omega)\to 0,$ $\sigma^{-1}(\Omega)\,d(\Omega)^{1/2}\to 0;$

3) $\|\varphi_j^\pm(x,\Omega)-\psi(x,\lambda_j)\|_\gamma\to 0,\quad d(\Omega)\to 0;$

4) $e_j^\pm(n,\Omega)\to 0,\quad d(\Omega)\to 0.$

Рассмотрим пример. Пусть Ω — область в трехмерном пространстве, сечение которой через ось вращения изображено на рис. 1, пусть $l\ll 1$. Тогда из наших результатов вытекает, что в случае краевых условий второго рода в круге $|\lambda-\lambda_j|\sim l^{1/2}$ существует полюс матрицы рассеяния и решение задачи рассеяния на интервале $\lambda_j-l^{1/2}\leqslant k^2\leqslant\lambda_j+l^{1/2}$ во внутренней области принимает значения порядка $\sim l^{-1/2}$. Вероятно, что полученная нами оценка занижена и соответствующие величины имеют по крайней мере порядки $O(l)$ и $O(l^{-1})$.

Примечание при корректуре. При более сильных ограничениях на границу области и функцию $\beta(x)$ в статье [3] доказано существование полюсов, но не доказан их резонансный характер и не получены оценки мнимой части полюсов и амплитуд в резонансе в зависимости от геометрии области.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Арсеньев*, ДАН, т. 197, № 3, 511 (1971). [2] *А. А. Арсеньев*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 12, № 1, 112 (1972). [3] *J. T. Beal*, Comm. Pure Appl. Math., v. 26, № 4, 549 (1973).