

Г. И. АРХИПОВ

КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 V 1974)

В настоящей статье излагается метод кратных тригонометрических сумм Г. Вейля, обобщающий известный метод И. М. Виноградова (¹⁻³).

Существо метода заключается в том, что оценка сверху модуля тригонометрической суммы сводится к оценке среднего значения модуля тригонометрической суммы. Как и в методе И. М. Виноградова, основной является теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы.

Для простоты рассматривается случай двойных тригонометрических сумм, в которых переменные «равноправны». Случай сумм большей кратности лишь техническими деталями отличается от рассмотренного; доказанные теоремы за счет усложнения доказательства могут быть несколько уточнены и обобщены.

Теорему о среднем мы доказываем p -адическим методом по схеме, предложенной А. А. Карацубой.

Теорема 1 (о среднем значении кратной тригонометрической суммы). Пусть n, k — натуральные, $n > 4$, τ — неотрицательное целое, $k \geq 2n^3 + n^2\tau$, $\alpha_{0,0}, \alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \dots, \alpha_{0,1}, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{n,n}$ — действительные числа;

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^n \sum_{t=0}^n \alpha_{mt} x^m y^t.$$

Положим

$$S(\alpha_{0,0}, \dots, \alpha_{n,n}) = \sum_{x=1}^P \sum_{y=1}^P e^{2\pi i f(x,y)}.$$

Тогда при

$$P \geq (2n)^{2n(1+1/(n-1))^\tau}$$

имеет место оценка

$$\begin{aligned} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(\alpha_{0,0}, \dots, \alpha_{n,n})|^{2k} d\alpha_{0,0} d\alpha_{0,1} \dots d\alpha_{n,n} &\leq \\ &\leq k^{2n^2\tau} \cdot 2^{3n^2\tau} \times P^{k\bar{k} - (n+1)2n + (n+1)2n(1-1/n)} \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы необходима следующая.

Основная лемма (аналог леммы Ю. В. Линника). Пусть p простое, T — число решений системы сравнений

$$\sum_{k=1}^{2n^2} (-1)^k z_k^m v_k^t = \lambda_{m,t} \pmod{p^{m+t}}, \quad m, t = 0, 1, \dots, n,$$

где $\lambda_{m,t}$ — фиксированные целые числа; неизвестные z_k, v_k при $k=1, 2, \dots, 2n^2$ принимают всевозможные значения из полной системы вычетов по $\text{mod } p^m$ с условием, что ранг матрицы B отличен от нуля в поле вычетов

по простому модулю p . При этом матрица B имеет $(n+1)^2$ строк и $2n^2$ столбцов, причем каждой паре индексов (m, t) соответствует своя строка, в которой при $k=1, 2, \dots, 2n^2$ на k -ом месте стоит выражение $z_k^m v_k^t$.

Тогда имеет место неравенство

$$T \leq n^{2n^2} p^{4n^2 - (n+1)^2 n}.$$

Следствием теоремы о среднем значении является, например, следующая теорема об оценке тригонометрической суммы.

Теорема 2. Пусть

$$a_{n,n} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

где q натуральное, $P^{1/2} < q < P^{2n-1/2}$, $(a, q) = 1$, $|\theta| \leq 1$. Пусть $\rho = c/(n^3 \ln n)$, где c — некоторая положительная постоянная.

Пусть d — натуральное, $d \leq P^{2\rho}$,

$$S_d = \sum_{x=1}^P \sum_{y=1}^P e^{2\pi i d f(x,y)}.$$

Тогда

$$|S_d| < c_1(n) P^{1-\rho}.$$

Из последней теоремы по известной схеме (¹, ²) получаются соответствующие теоремы о распределении дробных долей $f(x, y)$ и ряд других результатов.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. А. Карацубе за научное руководство.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Виноградов, Метод Тригонометрич. сумм в теории чисел. М., 1971.
² И. М. Виноградов, Избр. тр., М., 1952. ³ А. А. Карацуба, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 6 (1973). ⁴ Ю. В. Линник, ДАН, т. 34, № 7, 201. (1942). ⁵ А. А. Карацуба, Вестн. Московск. унив., сер. 1, в. 4, 28 (1962). ⁶ А. А. Карацуба, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 1 (1966). ⁷ К. Chandra Sekharan, Arithmetical Function, Berlin, 1970.
⁸ А. А. Карацуба, Матем. заметки, т. 4, в. 2, 125 (1965). ⁹ А. Weil, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., v. 34, 204 (1948).