Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Х. Ш. МУХТАРОВ

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 5 V 1974)

Пусть непрерывная в (a, b) функция $u(x)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to a} u(x)\rho(x)=\lim_{x\to b} u(x)\rho(x)=0, \tag{1}$$

$$\int_a^b |u(x)|dx<\infty, \qquad \int_0^l \frac{w(u\rho, t)}{t}dt<\infty, \tag{2}$$

где $l=(b-a)/2$, $\rho(x)=(x-a)^2(b-x)^2$, $w(u\rho,\ t)$ — обычный модуль непрерывности функции $u(x)\rho(x)$ на $[a,\ b]$ (в точках a и b $u(x)\rho(x)$ предполагаем равной нулю).

Класс функций $u(x)$, удовлетворяющий условиям (1) и (2) с нормой

$$\|u\|_{J(\rho)}=\int_a^b |u(s)|ds+\int_0^l \frac{w(u\rho, t)}{t}dt,$$

обозначим через $J(\rho)$, а класс функций $u(x)$, удовлетворяющих условию (1) с нормой

$$\|u\|_{C^0(\rho)}=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|\rho(x),$$

через $C^0(\rho)$.

Для оператора

$$Su=\int_a^b \frac{u(S)}{S-x}ds, \qquad a<x<b, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, имеет место

Теорема 1. *Сингулярный оператор* (3) *действует из* $J(\rho)$ *в* $C^0(\rho)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\|Su\|_{C^0(\rho)}\leqslant J\left\{\frac{\sqrt{3}}{63}(b-a)^3\int_0^b |u(s)|ds+\int_0^l \frac{w(u\rho, t)}{t}dt\right\}, \tag{4}$$

$$w(\rho Su, \sigma)\leqslant(b-a)^2\int_a^b |u(s)|ds+44\sigma\int_a^l \frac{w(u\rho, t)}{t(t+\sigma)}dt. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы 1 оператор ρSu нужно представить в виде

$$\rho Su=\int_a^b K(x,s)u(s)ds=\int_a^b \frac{u(s)\rho(s)}{s-x}ds,$$

где

$$K(x, s) = -\int_0^1 \rho'[S+\theta(x-s)]d\theta,$$

а затем воспользоваться неравенствами

$$\|Sf\|_C \leq 7\int_0^l \frac{w(f, t)}{t} dt, \tag{6}$$

$$w(Sf, \sigma) \leq 44\sigma\int_0^l \frac{w(f, t)}{t(t+\sigma)} dt, \tag{7}$$

справедливыми для функций $f(x)$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[a, b]$, для которых сходится интеграл в правой части неравенства (6).

Следует отметить, что оценки (6) и (7) могут быть получены (с некоторыми неопределенными константами) и из аналогичных оценок Л. Г. Магнарадзе ([1]), установленных им в случае замкнутого контура интегрирования.

Замечание 1. Теорема 1 и оценки типа (4) и (5) остаются в силе, если в качестве веса $\rho(x)$ взять функцию

$$\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)^2, \qquad a=c_0<c_1<c_2<\ldots<c_{n-1}<c_n=b, \tag{8}$$

а условие (1) заменить условием $\lim\limits_{x\to c_i}\rho(x)u(x)=0$, $i=0, 1, 2, \ldots, n$.

Определение. Скажем, что непрерывная в (a, b) функция $u(x)\in J_\varphi(\rho, \rho_0, p)$, если она удовлетворяет условию (1) и условиям:

$$1^0)\quad \sup_{0<t\leq l}\frac{w(\rho u, t)}{\varphi t} = H_\varphi(\rho u)<\infty,$$

$$2^0)\quad \|u\|_{L_p(\rho_0)} = \left\{\int_a^b \rho_0(x)\,|u(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}<\infty,$$

где $p>1$, $\rho_0(x)=(x-a)^{\alpha(p-1)}(b-x)^{\beta(p-1)}$, $0<\alpha$, $\beta<1$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(\sigma)$ — почти возрастающая в $(0, l]$ функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{0<\sigma}\frac{\sigma}{\varphi(\sigma)}\int_0^l\frac{\varphi(t)}{t(t+\sigma)}dt<\infty.$$

В классе $J_\varphi(\rho, \rho_0, p)$ введем норму

$$\|u\|_{J\varphi(\rho,\,\rho_0,\,p)} = \|f\|_{L_p(\rho_0)} + H_\varphi(\rho u). \tag{9}$$

Легко показать, что $J_\varphi(\rho, \rho_0, p)$ является пространством Банаха с нормой (9).

Теорема 2. *Оператор* (3) *действует из* $J_\varphi(\rho, \rho_0, p)$ *в* $J_\varphi(\rho, \rho_0, p)$ *и ограничен.*

Для доказательства этой теоремы нужно воспользоваться теоремой Б. В. Хведелидзе ([2]) об ограниченном действии оператора (3) из $L_p(\rho_0)$ в $L_p(\rho_0)$ и неравенством (5).

Если обозначить через $J_\varphi^0(\rho, \rho_0, p)$ класс функций $u(x)\in J_\varphi(\rho, \rho_0, p)$, для которых

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(\rho u, t)}{\varphi(t)} = 0, \tag{10}$$

то, воспользовавшись тем, что для функций $u(x)$, удовлетворяющих усло- вию (10), выполняется условие

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{\varphi(\sigma)}\int_0^l \frac{w(u\rho, t)}{t(t+\sigma)}\,dt=0.$$

На основании теоремы 2 доказывается

Теорема 3. *Оператор* (3) *действует из* $J_\varphi{}^0(\rho, \rho_0, p)$ *в* $J_\varphi{}^0(\rho, \rho_0, p)$ *и ограничен.*

Далее, обозначая через $J_{\varphi, r}(\rho, \rho_0, p)$ класс функций $u(x)$, удовлетворяющих условию (1), для которых конечна норма

$$\|u\|_{J_{\varphi,r}(\rho,\rho_0,p)}=\|u\|_{L_p(\rho_0)}+\left\{\int_0^l\frac{w^r(u\rho, t)\,\varphi^r(t)}{t^{1+r}}\,dt\right\}^{1/r},\qquad r\geqslant 1,$$

и используя лемму 1 работы ([3]), стр. 530, неравенство (5) и указанную выше теорему Б. В. Хведелидзе, можно доказать следующее утверждение

Теорема 4. *Оператор* (3) *действует из* $J_{\varphi, r}(\rho, \rho_0, p)$ *в* $J_{\varphi, r}(\rho, \rho_0, p)$ *и ограничен.*

Если воспользоваться неравенством, доказанным в ([4]):

$$\|f\|_{C[a,b]}\leqslant w(f, \xi)+\frac{\|f\|_{L_p}}{\xi^{1/p}},\qquad 0<\xi\leqslant l,\qquad p>1,$$

теоремой Б. В. Хведелидзе ([2]) и оценкой (5), то для $u(x)\in J(\rho, \rho_0, p)$ имеем

$$\|Su\|_{C^0(\rho)}\leqslant l_0\left\{\xi\int_a^b|u(s)|\,ds+\xi\int_0^l\frac{w(u\rho, t)}{t(t+\xi)}\,dt+\frac{\|u\|_{L_p(\rho_0)}}{\xi^{1/p}}\right\},\tag{4'}$$

где l_0 — константа, не зависящая от $u(x)$.

По определению $u(x)\in J(\rho, \rho_0, p)$, если $u(x)\in L_p(\rho_0)$ и удовлетворяет условиям (1) и (2).

Замечание 2. Теоремы 2, 3 и 4 остаются в силе, если

$$\rho(x)=\prod_{i=0}^n|x-c_i|^m,\qquad \rho_0(x)=\prod_{i=0}^n|x-c_i|^{\alpha_i(p-1)},\qquad p>1,\qquad 0<\alpha_i<1,$$

$$a=c_0<c_1<\ldots<c_{n-1}<c_n=b,\qquad m\geqslant 2.$$

В заключение отметим, что инвариантные относительно оператора (3) классы $H_{w_1, w_2, w}$, $H_{\varphi, \psi}$ ([4], [5]), а также класс H^* Н. И. Мусхелишвили ([6]) содержится в пространстве $J_\varphi(\rho, \rho_0, p)$ при соответствующем подборе $\varphi(\sigma)$, α и β.

Дагестанский политехнический институт
Махачкала

Поступило
10 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. Г. Магнарадзе*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 8, № 8 (1947). [2] *Б. В. Хведелидзе*, Тр. Тбилисск. матем. инст. АН ГрузССР, т. 23, 3 (1957). [3] *Х. Ш. Мухтаров*, ДАН, т. 213, № 3, 529 (1973). [4] *А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, А. М. Магомедов*, Изв. АН АзербССР, серия физико-технич. и матем. наук, № 1–2, 51 (1970). [5] *В. В. Салаев*, Уч. зап. Азерб. гос. унив., сер. физ.-матем. наук, № 6 (1966). [6] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.