

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

**О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ШАТРОВ**

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 14 I 1974)

Пусть  $K_1, \dots, K_l$  — выпуклые конусы в  $R^n$  с общей вершиной  $x_0$ . Будем говорить, что система конусов  $K_1, \dots, K_l$  обладает свойством отделимости <sup>(1)</sup>, если в  $R^n$  существует гиперплоскость, которая отделяет какой-либо один из этих конусов от пересечения остальных (т. е. для некоторого  $i$  конус  $K_i$  находится в одном замкнутом полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а пересечение остальных конусов — в другом замкнутом полупространстве).

Пусть, далее,  $\Omega \subset R^n$  и  $x_0 \in \Omega$ . Выпуклый конус  $Q \subset R^n$  с вершиной  $x_0$  будем называть шатром множества  $\Omega$  в точке  $x_0$  <sup>(2)</sup>, если существует такое гладкое отображение  $\psi$ , определенное в окрестности точки  $x_0$ , что выполнены условия:

1<sup>o</sup>)  $\psi(x) = x + o(x - x_0)$ ;

2<sup>o</sup>)  $\psi(x) \in \Omega$  при  $x \in Q \cap \Sigma$ , где  $\Sigma$  — некоторый шар с центром  $x_0$ .

Наконец, выпуклый конус  $K \subset R^n$  с вершиной  $x_0$  условимся называть локальным шатром множества  $\Omega$  в точке  $x_0$ , если для любой (отличной от  $x_0$ ) точки  $z_0 \in \text{relint } K$  найдется такой конус  $Q \subset K$  с вершиной  $x_0$ , являющийся шатром множества  $\Omega$  в точке  $x_0$ , что  $z_0 \in \text{relint } Q$  и  $\text{aff } Q = \text{aff } K$ .

В книге <sup>(3)</sup> и примыкающих статьях понятие шатра использовано для вывода необходимых условий в различных экстремальных задачах. Основой для получения этих необходимых условий служит следующее утверждение <sup>(2, 3)</sup>.

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega_1, \dots, \Omega_l$  — некоторые множества в  $R^n$ , имеющие общую точку  $x_0$ , и  $K_1, \dots, K_l$  — шатры этих множеств в точке  $x_0$ . Если система конусов  $K_1, \dots, K_l$  не обладает в  $R^n$  свойством отделимости и хотя бы для одного  $i$  конус  $K_i$  не является плоскостью (т. е.  $K_i \neq \text{aff } K_i$ ), то найдется отличная от  $x_0$  точка  $x' \in \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_l$ .

Заметим, что в <sup>(2, 3)</sup> эта теорема доказана даже для негладких шатров (получающихся, если в приведенном выше определении шатра предполагать  $\psi$  лишь непрерывным, а не гладким отображением). Для случая негладких шатров доказательство использует средства алгебраической топологии и является довольно сложным; в случае гладких шатров доказательство (также приведенное в <sup>(2, 3)</sup>) существенно проще. Заметим также, что теорема 1 остается справедливой для локальных шатров.

Докажем теперь следующее утверждение, тесно связанное с теоремой 1.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega_1, \dots, \Omega_l$  — некоторые множества в  $R^n$ , имеющие общую точку  $x_0$ , и пусть  $K_1, \dots, K_l$  — локальные шатры этих множеств в точке  $x_0$ . Если система конусов  $K_1, \dots, K_l$  не обладает в  $R^n$  свойством отделимости, то  $K_1 \cap \dots \cap K_l$  есть шатер множества  $\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_l$  в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть случай  $l=2$ , далее идет очевидная индукция. Итак, пусть  $K_1, K_2$  — локальные шатры множеств  $\Omega_1, \Omega_2$  в точке  $x_0$ , причем конусы  $K_1, K_2$  неотделимы в  $R^n$ . Пусть, далее,  $z_0$  — отличная от  $x_0$  точка множества  $\text{relint}(K_1 \cap K_2)$ . Тогда существуют такие конусы  $Q_1, Q_2$  с вершиной  $x_0$  и такие гладкие отображения  $\psi_1, \psi_2$ , определенные в окрестности точки  $x_0$ , что

$$z_0 \in \text{relint } Q_i, \quad \text{aff } Q_i = \text{aff } K_i, \\ \psi_i(x) = x + o(x - x_0), \quad \psi_i(\Sigma \cap Q_i) \subset \Omega_i, \quad i=1, 2, \quad (1)$$

где  $\Sigma$  — достаточно малый шар с центром  $x_0$ . Множество  $M_i = \psi_i(\Sigma \cap \text{aff } K_i)$  представляет собой вблизи  $x_0$  гладкое многообразие, имеющее в точке  $x_0$  касательную плоскость  $\text{aff } K_i$ . Так как  $\text{aff } K_1$  и  $\text{aff } K_2$  не лежат в одной гиперплоскости пространства  $R^n$  (поскольку конусы  $K_1$  и  $K_2$  неотделимы), то  $M = M_1 \cap M_2$  является вблизи  $x_0$  гладким многообразием, имеющим в точке  $x_0$  касательную плоскость  $\Gamma = \text{aff } K_1 \cap \text{aff } K_2$ .

Обозначим через  $\pi$  ортогональное проектирование плоскости  $\Gamma$  на  $M$  (т. е.  $\pi(x) \in M$  — такая точка, что вектор  $\pi(x) - x$  ортогонален  $\Gamma$ ). Отображение  $\pi$  определено для близких к  $x_0$  точек плоскости  $\Gamma$  и имеет вид  $\pi(x) = x + o(x - x_0)$ . Далее, через  $p$  обозначим ортогональное проектирование пространства  $R^n$  на плоскость  $\Gamma$ . Полагая  $\psi(x) = x + \pi(p(x)) - p(x)$ , получаем гладкое отображение  $\psi$ , определенное в окрестности точки  $x_0$  и имеющее вид  $\psi(x) = x + o(x - x_0)$ , причем

$$\psi(\Gamma \cap \Sigma^*) \subset M, \quad (2)$$

где  $\Sigma^*$  — достаточно малый шар с центром  $x_0$ .

Соотношение  $\psi_i(x) = x + o(x - x_0)$  означает, что матрица  $\partial \psi_i(x_0) / \partial x$  является единичной, и потому для  $\psi_i$  существует обратное отображение  $\varphi_i$  (определенное вблизи  $x_0$ ), причем матрица  $\partial \varphi_i(x_0) / \partial x$  также является единичной. Следовательно,  $\varphi_i(x) = x + o(x - x_0)$ . Заметим, что

$$\varphi_i(M_i \cap \Sigma_1) \subset \text{aff } K_i, \quad (3)$$

если шар  $\Sigma_1$  с центром  $x_0$  достаточно мал.

Пусть теперь  $Q^*$  — такой телесный конус с вершиной  $x_0$ , что  $z_0 \in \text{int } Q^*$  и  $Q^* \cap \text{aff } K_i \subset Q_i$ ,  $i=1, 2$ . Далее, пусть  $Q^{**}$ ,  $Q^{***}$  — такие замкнутые телесные конусы с вершиной  $x_0$ , что  $Q^{**}$  содержится строго внутри  $Q^*$ , (т. е.  $Q^{**} \subset \{x_0\} \cup \text{int } Q^*$ ), а  $Q^{***}$  содержится строго внутри  $Q^{**}$  и  $z_0 \in \text{int } Q^{***}$ . Так как каждое из отображений  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi$  имеет вид  $x + o(x - x_0)$ , то шары  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma^*$ , удовлетворяющие условиям (1), (2), (3), можно выбрать так, что

$$\varphi_i(Q^{**} \cap \Sigma_1) \subset Q^* \cap \Sigma, \quad i=1, 2; \quad \psi(Q^{***} \cap \Sigma^*) \subset Q^{**} \cap \Sigma. \quad (4)$$

Положив  $Q = Q^{***} \cap \Gamma$ , находим (в силу (1) — (4)):

$$\begin{aligned} \psi(Q \cap \Sigma^*) &= \psi(Q^{***} \cap \Gamma \cap \Sigma^*) \subset \psi(Q^{***} \cap \Sigma^*) \cap \psi(\Gamma \cap \Sigma^*) = \\ &\subset Q^{**} \cap \Sigma_1 \cap M \subset Q^{**} \cap \Sigma_1 \cap M_i = \psi_i(\varphi_i(Q^{**} \cap \Sigma_1 \cap M_i)) = \\ &\subset \psi_i(\varphi_i(Q^{**} \cap \Sigma_1) \cap \varphi_i(M_i \cap \Sigma_1)) \subset \psi_i(Q^* \cap \Sigma \cap \text{aff } K_i) \subset \psi_i(Q \cap \Sigma) \subset \Omega_i. \end{aligned}$$

Так как это справедливо для  $i=1, 2$ , то  $\psi(Q \cap \Sigma^*) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ , т. е.  $Q$  — шатер множества  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  в точке  $x_0$ . Поскольку  $\text{aff } Q = \Gamma = \text{aff } (K_1 \cap K_2)$  и  $z_0 \in \Gamma \cap \text{int } Q^{***} = \text{relint } Q$ , конус  $K_1 \cap K_2$  является локальным шатром множества  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  в точке  $x_0$ .

Из доказанной теоремы несложно вытекает теорема 1 (даже для случая, когда  $K_1, \dots, K_l$  — локальные шатры). В самом деле, поскольку система конусов  $K_1, \dots, K_l$  не обладает свойством отделимости, найдется

точка  $z_0 \in \bigcap_{i=1}^l \text{relint } K_i$ . Так как хотя бы один из конусов  $K_i$  не является плоскостью, то для этого конуса  $x_0 \notin \text{relint } K_i$ . Следовательно,  $z_0 \neq x_0$ . По теореме 2 конус  $K = K_1 \cap \dots \cap K_l$  является локальным шатром множества  $\Omega = \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_l$ . Так как  $z_0 \in \text{relint } K$ , то найдется конус  $Q \subset K$ , содержащий  $z_0$  и являющийся шатром множества  $\Omega$  в точке  $x_0$ . Пусть  $\psi$  — соответствующее отображение, т. е.  $\psi(x) = x + o(x - x_0)$  и  $\psi(Q \cap \Sigma) \subset \Omega$ . При достаточно малом  $\lambda > 0$  имеем  $x_0 + \lambda(z_0 - x_0) \in Q \cap \Sigma$ , и потому точка  $x(\lambda) = \psi(x_0 + \lambda(z_0 - x_0))$  принадлежит множеству  $\Omega$ . Остается заметить, что

$$x(\lambda) = \psi(x_0 + \lambda(z_0 - x_0)) = x_0 + \lambda(z_0 - x_0) + o(\lambda),$$

так что при достаточно малом  $\lambda > 0$  точка  $x' = x(\lambda)$  отлична от  $x_0$  (поскольку  $z_0 - x_0 \neq 0$ ).

Приведенное доказательство теоремы 1 относится лишь к случаю «гладких» шатров (поскольку опирается на теорему 1). Следующий пример показывает, что сложность доказательства теоремы 1 для негладких шатров (см. <sup>(2, 3)</sup>) не случайна; во всяком случае, примененный здесь метод доказательства неприменим, так как теорема 2 для случая негладких шатров неверна.

Пример. В пространстве  $R^4$  с декартовыми координатами  $t, u, v, w$  рассмотрим подпространства  $K_1$  и  $K_2$ , определяемые соответственно уравнениями  $t-w=0$  и  $t+w=0$ . Очевидно, что  $K_1$  и  $K_2$  (которые мы будем рассматривать как конусы с вершиной 0) неотделимы в  $R^4$ . Пересечение  $K = K_1 \cap K_2$  представляет собой двумерную плоскость, определяемую уравнениями  $t=0, w=0$ .

Рассмотрим теперь в пространстве  $R^3$  переменных  $u, v, w$  тор  $T_h$ , определяемый неравенством

$$(k^2u - k)^2 + (\sqrt{(k^2v)^2 + (k^2w - 1)^2} - 1)^2 \leq 1/\rho,$$

( $k$  — натуральное число). Обозначим через  $P$  объединение всех торов  $T_h, h=1, 2, \dots$ , и полупространства  $w \leq 0$ , а через  $d(u, v, w)$  — расстояние от точки  $(u, v, w)$  до границы  $\text{bd } P$  множества  $P$ . Функция

$$\varphi(u, v, w) = \begin{cases} d(u, v, w) & \text{при } x \notin P, \\ -d(u, v, w) & \text{при } x \in P \end{cases}$$

непрерывна и имеет вид  $\varphi(u, v, w) = w + o(|u| + |v| + |w|)$  (поскольку множество  $\text{bd } P$  расположено между поверхностями  $w=0$  и  $w=3u^2$ ).

Обозначим теперь через  $\Omega_1$  множество всех точек  $x = (t, u, v, w) \in R^4$ , для которых  $t = \varphi(u, v, w)$ . Положив

$$\psi_1(x) = (t - w + \varphi(u, v, w), u, v, w),$$

мы получаем отображение  $R^4 \rightarrow R^4$ , имеющее вид  $\psi(x) = x + o(x)$ . Так как  $\psi_1(K_1) \subset \Omega_1$ , то  $K_1$  — негладкий шатер множества  $\Omega_1$  в точке 0.

Аналогично, множество  $\Omega_2$  всех точек  $x = (t, u, v, w)$ , для которых  $t = -\varphi(u, v, w)$ , имеет конус  $K_2$  своим негладким шатром в точке 0. Однако конус  $K = K_1 \cap K_2$  негладким шатром (и даже локальным негладким шатром) множества  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  в точке 0 не является.

В самом деле, множество  $\Omega$  определяется в  $R^4$  системой уравнений  $t=0, \varphi(u, v, w)=0$ . Отбросив координату  $t$  (т. е. перейдя в пространство  $R^3$  переменных  $u, v, w$ ), мы можем заменить  $\Omega$  множеством  $\text{bd } P$ , а  $K$  — плоскостью  $w=0$ . Допустим, что плоскость  $w=0$  является негладким шатром множества  $\text{bd } P$  в точке 0, т. е. существует отображение  $\psi$  (определенное вблизи точки 0), удовлетворяющее указанным в начале заметки условиям 1<sup>0</sup>), 2<sup>0</sup>). Окружность  $\Lambda_\rho$ , определяемая в плоскости  $w=0$  уравнением  $u^2 + v^2 = \rho^2$ , а также ограничиваемый ею круг, лежат при достаточно малом  $\rho$  в области определения отображения  $\psi$ . Следовательно, кривая  $\psi(\Lambda_\rho)$ , лежащая (возможно, с самопересечениями) в множестве  $\text{bd } P$ , стягивается в точку в множестве  $\text{bd } P$ . Но при достаточно малом  $\rho$  кривая  $\psi(\Lambda_\rho)$  один раз обходит точку 0 на поверхности  $\text{bd } P$  и потому не может быть стягиваема в точку в силу неодносвязности поверхности  $\text{bd } P$ . Полученное противоречие показывает, что  $K$  не является негладким шатром множества  $\Omega$  в точке 0. Из аналогичных соображений следует, что никакой угол  $Q$  в плоскости  $K$ , содержащий внутри себя луч  $(0, u, 0, 0)$ , где  $u$  пробегает неотрицательные числа, не является негладким шатром множества  $\Omega$  в точке 0. Поэтому  $K$  не является даже локальным негладким шатром.

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
25 XII 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. Г. Болтянский, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 7, № 4, 250 (1972). <sup>2</sup> В. Г. Болтянский, Там же, т. 7, № 5, 325 (1972). <sup>3</sup> В. Г. Болтянский, Оптимальное управление дискретными системами, «Наука», 1973.