

В. А. БУЧИН, А. Г. ЦЫПКИН

**О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ
И НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПЕРЕМЕННОМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

(Представлено академиком Л. И. Седовым 12 VI 1974)

Рассмотрим задачу о поведении поверхности раздела двух однородных несжимаемых жидкостей, находящихся в потенциальном поле сил тяжести. Жидкости предполагаются изотропными, непроводящими, с диэлектрическими и магнитными проницаемостями $\epsilon_i, \mu_i, i=1, 2$, соответственно.

Система уравнений, описывающая поведение жидкостей в электромагнитном поле, имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}}_i &= 0, & \rho_i \frac{d\bar{\mathbf{V}}_i}{dt} &= -\operatorname{grad} P_i + \rho_i \bar{\mathbf{g}}, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_i &= \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}_i}{\partial t}, & \operatorname{div} \bar{\mathbf{D}}_i &= 0, & \bar{\mathbf{D}}_i &= \epsilon_i \bar{\mathbf{E}}_i, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_i &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_i}{\partial t}, & \operatorname{div} \bar{\mathbf{B}}_i &= 0, & \bar{\mathbf{B}}_i &= \mu_i \bar{\mathbf{H}}_i, \end{aligned} \quad (1)$$

$\bar{\mathbf{V}}_i$ — скорость, $\rho_i \bar{\mathbf{g}}$ — сила тяжести, P_i — полное давление в i -й жидкости, ρ_i — плотность i -й жидкости.

Уравнения гидромеханики системы (1) в случае потенциальных движений жидкости ($\bar{\mathbf{V}}_i = \operatorname{grad} \varphi_i$) имеют интеграл Коши — Лагранжа.

Будем полагать, что невозмущенное состояние жидкостей есть состояние покоя и будем рассматривать малые отклонения от состояния равновесия. Возмущения величин в дальнейшем будем обозначать соответствующими малыми латинскими буквами.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} x &= lx^*, & y &= ly^*, & z &= lz^*, & \rho_i &= \rho_0 \rho_i^*, & t &= \tau/\omega, \\ \bar{\mathbf{V}}_i &= l\omega \bar{\mathbf{V}}_i^*, & P_i &= \rho_0 \omega^2 l^2 P_i^*, & \bar{\mathbf{H}}_i &= H_0 \bar{\mathbf{H}}_i^*, & \bar{\mathbf{E}}_i &= E_0 \bar{\mathbf{E}}_i^*; \end{aligned}$$

здесь l — характерный линейный размер задачи, H_0 и E_0 — характерные значения напряженностей магнитного и электрического полей, ω — характерная частота задачи. В дальнейшем безразмерные величины будем писать без звездочек.

Положим, что уравнение возмущенной поверхности раздела двух жидкостей имеет вид $z - \zeta(x, y, t) = 0$. В этом случае граничные условия для возмущений на поверхности раздела двух жидкостей (после снесения их на невозмущенную поверхность $z=0$ и пренебрежения членами порядка v_i/c) в случае отсутствия поверхностных токов и поверхностных зарядов примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, & \mathbf{h}_{\tau 1} &= \mathbf{h}_{\tau 2}, & \mathbf{e}_{\tau 1} &= \mathbf{e}_{\tau 2}, \\ (\mu_1 - \mu_2) (\mathbf{H}_{0\tau} \operatorname{grad} \zeta) &= \mu_1 h_{z1} - \mu_2 h_{z2}, \\ (\epsilon_1 - \epsilon_2) (E_{0\tau} \operatorname{grad} \zeta) &= \epsilon_1 e_{z1} - \epsilon_2 e_{z2}, \end{aligned}$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g \zeta (\rho_1 - \rho_2) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4\pi} \mathbf{H}_0 \tau \mathbf{h}_{\tau 1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{4\pi} \mathbf{E}_0 \tau \mathbf{e}_{\tau 1};$$

здесь индекс τ означает тангенциальную проекцию вектора.

Поведением границы раздела двух жидкостей можно управлять с помощью внешнего электромагнитного поля, используя различие диэлектрических и магнитных проницаемостей жидкостей, что будет проиллюстрировано ниже. Управление поведением свободной поверхности идеальной проводящей жидкости с помощью переменного магнитного поля рассмотрено в работе (1).

Рассмотрим поведение поверхности раздела двух намагничивающихся жидкостей, занимающих следующие области пространства с декартовой системой координат $Oxyz$: $V_1 (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 < z < l_1)$ и $V_2 (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -l_2 < z < 0)$. Области V_1 и V_2 ограничены твердыми бесконечно проводящими плоскостями $z=l_1$ и $z=-l_2$ соответственно; компоненты вектора ускорения свободного падения $(0, 0, -g)$.

Внешнее магнитное поле представляет собой поле круговой поляризации $\mathbf{H}_0 = H_0 (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$, а внешнее электрическое поле отсутствует. Полагая $\varepsilon_i = 1$ и справедливость неравенств $(\omega l_1/c) \ll 1$, $(\omega l_2/c) \ll 1$, линеаризованную систему можно записать в виде

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad \text{rot } \mathbf{h}_i = 0, \quad \text{div } \mathbf{h}_i = 0. \quad (3)$$

Граничные условия на твердых стенках следующие:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{h}_{\tau i} = 0. \quad (4)$$

Уравнение для Фурье-образа по x и y от функции ζ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \tau^2} + \frac{k}{\omega^2 (\rho_1 \text{cth } kl_1 + \rho_2 \text{cth } kl_2)} \left\{ \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 H_0^2 k}{8\pi (\mu_1 \text{th } kl_1 + \mu_2 \text{th } kl_2)} \times \right. \\ \left. \times (1 + \cos 2\tau) - g(\rho_1 - \rho_2) \right\} \zeta_k = 0. \quad (5)$$

В случае $\rho_1 > \rho_2$ возмущения границы раздела двух жидкостей неустойчивы в отсутствие магнитного поля (неустойчивость Рэлея — Тейлора). С помощью внешнего магнитного поля эти возмущения могут быть сделаны устойчивыми для всех значений $k \in (0, k_1)$ ($k_1 = 10^8 \text{ см}^{-1}$ соответствует длине волны порядка размеров атома), если, например, выполнены неравенства

$$H_0^2 \geq 8\pi g (\rho_1 - \rho_2) (\mu_1 + \mu_2) / (\mu_1 - \mu_2)^2, \quad (6)$$

$$\omega^2 \geq \pi g (\rho_1 - \rho_2) k_1 / [2(\rho_1 \text{cth } k_1 l_1 + \rho_2 \text{cth } k_1 l_2)].$$

Так, если $l_1 \approx l_2 \approx 10^2 \text{ см}$, а $(\rho_1 - \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2) \approx 1$, то $\omega \geq 10^4 \text{ гц}$.

В случае $\rho_1 < \rho_2$, используя свойства решений уравнения Матве (5) (2, 3), для любого фиксированного значения $k \in (0, k_1)$ можно подобрать такие значения H_0 и ω , что среди решений уравнения (5) существуют неустойчивые. Минимальная частота, дестабилизирующая границу раздела, имеет порядок частоты собственных колебаний жидкости в отсутствие электромагнитного поля. При этом декремент возрастания колебаний в основном определяется величиной H_0 и стремится к бесконечности при $H_0 \rightarrow 0$.

Рассмотрим поведение поверхности раздела двух жидкостей с диэлектрическими проницаемостями ε_i , находящихся в квазистационарном электрическом поле $\mathbf{E}_0(t)$. Положим, что $\mu_i = 1$. Магнитное поле отсутствует. Жидкости находятся между бесконечно проводящими обкладками плоского конденсатора ($x=l$ и $x=-l$) и занимают области $V_1 (-l < x < l, -\infty < y < +\infty, 0 < z < +\infty)$ и $V_2 (-l < x < l, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < 0)$. Рассмот-

рим задачу, двумерную по координатам x, z , причем компоненты вектора внешнего невозмущенного электрического поля следующие: $(E_0(t), 0, 0)$; здесь $E_0(t) = u_0(t)/(2l)$, $u_0(t)$ — разность потенциалов между обкладками конденсатора; компоненты вектора ускорения свободного падения $(0, 0, -g)$.

Система уравнений, которой удовлетворяют возмущения гидродинамических величин и электрического поля, подобна системе (3) и имеет вид

$$\Delta\varphi_i = 0, \quad \Delta\psi_i = 0, \quad e_i = \text{grad } \psi_i. \quad (7)$$

Граничные условия на твердых стенках можно записать в виде

$$\partial\varphi_i/\partial x = 0, \quad \psi_i = 0. \quad (8)$$

Граничные условия на поверхности раздела двух сред следуют из (2), а на бесконечности возмущения гидродинамических и электрических величин равны нулю.

Выражение для n -й компоненты разложения в ряд Фурье по x функции

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{2l} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

с учетом сил поверхностного натяжения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial \tau^2} + \frac{\pi n}{2l\omega^2(\rho_1 + \rho_2)} \left[\frac{n}{8\pi} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0^2(t) + (\rho_2 - \rho_1)g + \sigma_0 \frac{\pi^2 n^2}{4l^2} \right] \xi_n = 0, \quad (9)$$

здесь σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения. С помощью выбора функции $E_0(t)$ можно эффективно управлять поведением границы раздела двух жидкостей.

К исследованию поведения решения уравнения (9) сводятся такие, например, задачи, как стабилизация неустойчивости Рэлея — Тейлора ($\rho_1 > \rho_2$), дестабилизация границы раздела двух жидкостей, устойчивой в отсутствие электрического поля ($\rho_1 < \rho_2$).

Остановимся на второй из перечисленных задач. Будем считать, что $E_0(t) = E_0 \cos \omega t$, $E_0 = \text{const}$. Тогда уравнение (9) превращается в уравнение Матье

$$\partial^2 \xi_n / \partial \tau^2 + (\delta_n + \beta_n \cos 2\tau) \xi_n = 0; \quad (10)$$

здесь

$$\delta_n = \frac{\pi n}{2l\omega^2(\rho_1 + \rho_2)} \left[\frac{n}{16l} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0^2 + (\rho_2 - \rho_1)g + \sigma_0 \frac{\pi^2 n^2}{4l^2} \right]$$

$$\beta_n = \frac{\pi n^2}{32l^2\omega^2(\rho_1 + \rho_2)} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0^2.$$

Возмущения границы раздела двух жидкостей будут неустойчивы, если хотя бы при одном n выполнены, например, следующие достаточные условия (², ³): $\delta_n = 1$, $0 < \beta_n \leq 10$. Проведем некоторые численные оценки, например, для $n=10$, полагая $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 3$, $\rho_1 = 0,88$ г/см³, $\rho_2 = 0,89$ г/см³, $\sigma_0 \approx 40$ дин/см.

При $\beta_n = 0,32$ получим $\omega \approx 1,6$ сек⁻¹, $E_0 \approx 10^4$ в/см, характерное время возрастания гидродинамических возмущений $\tau_0 \approx 8$ сек. Рассматривая другие зоны неустойчивости решений уравнения (10), можно добиться неустойчивости возмущений при меньших значениях E_0 и больших значениях ω . При этом значения τ_0 будут существенно меньшими. Отметим, что полученные результаты без труда обобщаются на случай произвольной зависимости $\mu = \mu(H)$ и $\varepsilon = \varepsilon(E)$ (⁴, ⁵).

В заключение авторы выражают благодарность А. Г. Куликовскому за полезные обсуждения.

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 V 1974

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. П. Ладиков-Роев, *Мех. жидкости и газа*, № 2 (1967). ² П. В. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матъе*, ИЛ, 1953. ³ Л. Чезари, *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, М., 1964. ⁴ Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*, т. 1, «Наука», 1973. ⁵ М. И. Шлоomis, *УФН*, т. 112, в. 3 (1974).