Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 62-504.3 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Г. А. СТЕПАНЬЯНЦ

О НЕКОТОРЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 16 IV 1974)

Известно, что поведение динамической системы с квантованием времени описывается конечно-разностными уравнениями [1], определяющими ее движение в дискретные моменты времени, кратные периоду квантования τ. Пусть x — вектор фазовых координат системы, $x_k=x(k\tau)$ и $\Delta x=x_{k+1}-x_k$ — первая конечная разность. Будем рассматривать дискретные системы, описываемые уравнениями в конечных разностях порядка n вида

$$\Delta x=F(x), \tag{1}$$

где $F(x)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная на каждом компактном множестве значений аргумента вектор-функция.

Пусть теперь $\gamma(\alpha)$ — периодическая с периодом 2π кусочно-линейная функция от α такая, что $\gamma(\alpha)=\frac{9}{4\pi^2}\alpha$ при $0\leqslant\pi<{}^2/_3\pi$ и $\gamma(\alpha)=0$ при ${}^2/_3\pi\leqslant\alpha<2\pi$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot h&=\gamma(\alpha)F(x)-\frac{\gamma(\alpha-{}^4/_3\pi)}{[\gamma(\alpha-{}^4/_3\pi)-{}^3/_2\pi]^2}h,\\ \dot x&=\gamma(\alpha-{}^2/_3\pi)h,\\ \dot\alpha&=2\pi/\tau, \end{aligned} \tag{2}$$

где x, h — n-мерные вектора $h\in H$, $x\in X$, а H и X — n-мерные эвклидовы пространства. Систему (2) назовем **непрерывным расширением** (1).

В силу свойств функций $F(x)$ и $\gamma(\alpha)$, будут существовать равномерно непрерывные $(2n+1)$-мерные функции $y=(h, x, \alpha)$, являющиеся решением системы (2) в смысле Филиппова [2]. Эти решения в моменты времени, кратные периоду квантования, будут удовлетворять уравнению в конечных разностях (1), если начальные условия по h и α положить равными нулю. Действительно, на интервале $(0, {}^1/_3\tau)$ вектор x не изменяется, в то время как вектор h интегрируется до значения $F(x)$, соответствующего Δx. На интервале $({}^1/_3\tau, {}^2/_3\tau)$, наоборот, вектор x, в силу второго уравнения, получает приращение $\Delta x=h$ при постоянном h. Наконец, на интервале $({}^2/_3\tau, \tau)$ вектор x остается неизменным, а норма вектора h уменьшается до нулевого значения и процесс начинается снова.

Так как правая часть системы (2) является периодической функцией от α, то координату α можно рассматривать как точку окружности Q длиной 2π [3]. При этом система (2) определяет однопараметрическую (параметр t) полугруппу отображений пространства $Y=H\times X\times Q$ в себя и, таким образом, задает движение некоторой непрерывной свободной стационарной динамической системы Калмана [4]. Если, кроме того, функция $F(x)$ такова, что движения этой системы образуют группу (при этом динамическая система является обратимой в смысле Калмана, а отображения пространства Y в себя являются взаимно однозначными при каждом значении параметра t), то уравнения (2) определяют движение абстрактной динамической системы Маркова — Немыцкого ([3]), фазовым пространством которой является $(2n+1)$-мерный цилиндр $Y=H\times X\times Q$.

Ясно, что всякой траектории L системы (2) в пространстве Y будет соответствовать последовательность $L^*=\{x_0, x_1, \ldots\}$ точек пространства X (дискретная траектория), которая получается как проекция на X пересечения $L\cap G$, где $G=\{0\}\times X\times\{\alpha_0\}$, α_0 — начало отсчета на Q, а $\{0\}$ — начало координат пространства H. Последовательность L^* будем называть следом траектории L на пространстве X. Используя такую связь между траекториями систем (1) и (2), укажем некоторые дискретные аналоги классических определений качественной теории непрерывных систем, имеющие смысл как для случая обратимых, так и для случая необратимых систем.

Множество $W_X\subset X$, состоящее из точек дискретных траекторий, назовем ω-инвариантным, если $x_0\in W_X\Rightarrow x_k\in W_X$ для всех k. Траекторию L^* назовем состоянием покоя, если $x_0=x_k$ для любых k. Минимальное из таких чисел $m\neq 0$ (если они существуют), для которых $x_0=x_m$, называется периодом, а соответствующее движение периодическим. Точка x^* называется ω-предельной для траектории L^*, если в L^* найдется подпоследовательность точек x, сходящаяся к x^*. Замкнутое инвариантное множество называется минимальным, если оно не содержит строгого подмножества с теми же свойствами. Последовательность L^* называется рекуррентной, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $K(\varepsilon)$, что ε-окрестность любого отрезка L^* длиной $K(\varepsilon)$ содержит всю последовательность (при этом говорят, что L^* аппроксимируется с точностью до ε любым своим отрезком длины $K(\varepsilon)$).

В силу непрерывности движения системы (2) и компактности отрезка ее траектории, концы которого соответствуют моментам квантования, из того факта, что дискретная траектория является следом на замкнутом в Y множестве G траектории непрерывной системы, вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы ω-инвариантное множество $W_X\subset X$, состоящее из дискретных траекторий системы* (1), *являлось:* 1) *замкнутым,* 2) *ограниченным,* 3) *траекторией периодического движения,* 4) *ω-предельным для некоторой дискретной траектории,* 5) *минимальным,* 6) *рекуррентным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось следом на X множества $W\subset Y$, состоящего из начинающихся в точках множества $W_G=\{0\}\times W_X\times\{\alpha_0\}$ траекторий системы* (2), *являющейся непрерывным расширением* (1) *и удовлетворяющего тем же самым свойствам.*

Схема доказательства. Ясно, что из ω-инвариантности W следует ω-инвариантность W_G и обратно, а выполнение любого из перечисленных свойств для W_G влечет за собой его справедливость для W_X, так что требуется доказать только необходимость условий теоремы.

1) Для доказательства замкнутости заметим, что из ω-инвариантности W_X следует, что множество W можно построить как объединение компактных отрезков положительных полутраекторий, начинающихся в W_G и имеющих временну́ю длину τ. При этом, не нарушая общности, можно считать, что всякая последовательность Коши точек из W соответствует сходящейся последовательности моментов времени и замкнутость W_X повлечет за собой замкнутость W в силу непрерывности решений (2).

2) Свойство ограниченности следует из того, что в силу первого уравнения системы (2) вариация нормы вектора h равна вариации нормы x, а координата α ограничена величиной 2π.

3) Утверждение о периодичности движений следует непосредственно из определений.

4) Если W_X состоит из ω-предельных точек дискретной траектории L^*, то ясно, что точки множества W_G будут ω-предельными для той траектории L, следом которой является L^*. Для остальных точек из W их ω-

предельность можно получить сдвигом вдоль траектории L точек множества W_G на соответствующее время t, $t<\tau$.

5) Свойство минимальности доказывается от противного с учетом единственности решения системы (2) для положительных моментов времени.

6) Свойство рекуррентности для W докажем, построив для всякого $\varepsilon>0$ такие отрезки дискретной траектории, которые будут аппроксимировать ее с точностью до $\delta(\varepsilon)$, причем δ должно быть выбрано так, чтобы для любых точек x, x' из W_X выполнялись соотношения

$$\|x-x'\|<\delta\Rightarrow\|y(t)-y'(t)\|<\varepsilon$$

для любых $0\leqslant t\leqslant\tau$, где $y(0)=(0, x, \alpha_0)$. Существование такого δ следует из непрерывности решений (2) и компактности W. Если теперь $K(\delta)$ — длина отрезка дискретной траектории, то отрезок непрерывной траектории длиной $\tau(1+K(\delta))$ будет аппроксимировать ее с точностью до ε.

Непосредственным следствием теоремы 1 являются следующие дискретные аналоги основных положений качественной теории непрерывных динамических систем ([3]).

1) Замыкание ω-инвариантного множества ω-инвариантно.

2) Граница ω-инвариантного множества есть ω-инвариантное множество.

3) Множество точек периодических движений и покоя замкнуты.

4) Множество ω-предельных точек замкнуто и ω-инвариантно.

5) Всякое ω-инвариантное компактное множество содержит некоторое минимальное подмножество.

6) Множество ω-предельных точек устойчивого по Лагранжу движения дискретной системы содержит некоторое минимальное множество.

7) Для того чтобы ω-инвариантное компактное множество W_X дискретной системы было минимальным, необходимо и достаточно, чтобы любая содержащаяся в нем дискретная траектория представляла собой плотное в W_X множество, соответствующее рекуррентному движению.

Ясно, что таким же путем можно получить ряд других положений качественной теории, например, утверждения, связанные с устойчивостью по Пуассону и с возвращаемостью областей. Особо отметим, что след на X периодического движения системы (2) будет состоянием покоя для (1), если период непрерывного движения равен τ, и что свойство связности множества W не обязано сохраняться для его следа W_X.

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим следующий практически важный пример, часто встречающийся при исследовании систем управления собственно неустойчивыми объектами.

Пусть система (1) такова, что она имеет единственное тривиальное решение $x=0$, являющееся неустойчивым в малом, а координата $F_k(x)$ функции $F(x)$ является кусочно-постоянной (например, система может содержать релейный элемент или квантователь уровня). Рассмотрим случай, когда всякое движение, начинающееся в достаточно малой окрестности начала координат, является положительно устойчивым по Лагранжу. При этом множество ω-предельных точек такого движения не содержит начала координат и в силу свойств 4) и 7) содержит минимальное множество, состоящее из рекуррентных движений. Покажем, что, как правило, эти движения не являются периодическими и, следовательно, в установившемся режиме в дискретной системе будут наблюдаться сложные непериодические колебания.

Действительно, такому движению системы (1) соответствует рекуррентное движение системы (2), не содержащее тривиального периодического решения. Если это решение периодическое, то периодическим должно быть и изменение всех его координат, причем в силу последнего уравнения системы период должен быть кратен τ. Однако в силу особенностей системы (2) в промежутках между моментами квантования скорость изменения

k-ой координаты кратна уровням постоянства F_{km} функции F_k (x). Следовательно, для периодичности движения системы должно существовать такое целое q и такое конечное множество индексов M, чтобы выполнялось равенство

$$q\tau = \sum_{m \in M} F_{km}.$$

Поскольку множество таких периодов τ, для которых выполняется записанное равенство, не более чем счетно, то ясно, что, как правило, в системах (1) и (2) будут наблюдаться рекуррентные движения, не являющиеся периодическими. Таким образом, существование непрерывного расширения для дискретных систем позволяет выявить законы их качественного поведения. Основные положения качественной теории непрерывных динамических систем имеют дискретные аналоги и их можно непосредственно использовать для исследования свойств дискретных траекторий, составляющих ω-предельные и инвариантные множества.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
25 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Халанай, Д. Векслер,* Качественная теория импульсных систем, М., 1971. [2] *А. Ф. Филиппов,* Матем. сборн., т. 51 (93), № 1 (1960). [3] *В. В. Немыцкий, В. В. Степанов*, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949. [4] *Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб,* Очерки по математической теории систем, М., 1971.