Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 3

УДК 517.52+513.88 МАТЕМАТИКА

В. А. ТКАЧЕНКО

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 20 V 1974)

Пусть $H(\theta)$ есть 2π-периодическая функция, тригонометрически выпуклая при заданном порядке ρ (см. [1]), со значениями в $(-\infty, +\infty]$ и $\mathfrak{M}(H)$ — множество функций того же класса, удовлетворяющих неравенству $h(\theta)<H(\theta)$, $0\leqslant\theta<2\pi$. Пусть, кроме того, функция $H(\theta)$ непрерывна на каждом замкнутом интервале, где она ограничена и $\mathfrak{M}(H)\neq\phi$. Обозначим через $\mathcal{F}_h$, $h\in\mathfrak{M}(H)$, банахово пространство целых функций, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_h=\sup|\psi(re^{i\theta})|\exp[-h(\theta)r^\rho],$$

и через $\mathcal{F}(H)$ индуктивный предел семейства $\{\mathcal{F}_h\}$. Сопряженное пространство $\mathcal{E}(H)=\mathcal{F}^*(H)$ является пространством Фреше [2].

Теорема 1. *$\mathcal{F}(H)$ и $\mathcal{E}(H)$ являются совершенно полными монтелевскими пространствами.*

При доказательстве этой теоремы мы используем результаты работы [3].

Целую функцию $\varphi(\lambda)$ назовем допустимой для пары пространств $\mathcal{F}(H_1)$, $\mathcal{F}(H_2)$, если $\varphi\psi\in\mathcal{F}(H_2)$ при $\psi\in\mathcal{F}(H_1)$. Множество функций, допустимых для пары $\mathcal{F}(H_1)$, $\mathcal{F}(H_2)$, обозначим через $\mathcal{M}(H_1, H_2)$.

Теорема 2. *Пусть H_1, H_2 таковы, что из $H_1(\theta)=+\infty$ следует $H_2(\theta)=+\infty$.*

Тогда $\varphi\in\mathcal{M}(H_1, H_2)$ в том и только том случае, когда φ — целая функция не выше нормального типа при порядке ρ с индикатором $h_\varphi(\theta)$, удовлетворяющим неравенству $h_\varphi(\theta)\leqslant H_2(\theta)-H_1(\theta)$ при тех θ, где $H_2(\theta)<\infty$.

Обозначим через D оператор, сопряженный с оператором умножения на независимую переменную в пространстве $\mathcal{F}(H)$. Пусть $\delta_\mu\in\mathcal{E}(H)$ определяется для $\mu\in C^1$ равенством $\langle\delta_\mu, \psi\rangle=\psi(\mu)$. С каждой целой функцией $\varphi(\lambda)$ свяжем линейный (быть может, неограниченный в $\mathcal{E}(H)$) оператор $\varphi(D)$, определяемый на плотной в $\mathcal{E}(H)$ линейной оболочке линейно независимой системы векторов $\{\delta_\mu\}$ равенством $\langle\varphi(D)\delta_\mu, \psi\rangle=\varphi(\mu)\psi(\mu)$, $\psi\in\mathcal{F}(H)$. Из теоремы 1 и теоремы о замкнутом графике можно получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Оператор $\varphi(D)$ допускает продолжение до линейного оператора, определенного на всем $\mathcal{E}(H_1)$ и отображающего его пространство в $\mathcal{E}(H_2)$, тогда и только тогда, когда $\varphi\in\mathcal{M}(H_2, H_1)$.*

Отметим, что в случае $\varphi\in\mathcal{M}(H_2, H_1)$ будет $\varphi(D)=\Phi^*$, где Φ: $\mathcal{F}(H_2)\to\mathcal{F}(H_1)$ — непрерывный оператор умножения на функцию $\varphi(\lambda)$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(\lambda)=\sum c_k\lambda^k\neq0$ — заданная целая функция. Для существования предела*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_kD^kf \tag{1}$$

в слабой (а тогда и в сильной) топологии пространства $\mathcal{E}(H_2)$ на каждом векторе $f\in\mathcal{E}(H_1)$ необходимо и достаточно, чтобы:

1) $\varphi(\lambda)$ *была функцией не выше нормального типа при порядке* ρ;
2) *выполнялось неравенство* $H_2(\theta) \leqslant H_1(\theta)$;
3) *в случае* $H_1(\theta) \neq \infty$ *тип* σ_φ *функции* φ *удовлетворял неравенству*

$$\sigma_\varphi \leqslant \inf[H_1(\theta) - H_2(\theta)],$$

где нижняя грань берется по всем $\theta \in [0, 2\pi]$, *для которых* $H_1(\theta) < \infty$.

Эту теорему мы выводим из теоремы 1 и теоремы Банаха — Штейнгауза. Отметим, что вопрос о существовании предела (1) в различных пространствах аналитических функций восходит к работам Пинкерле (4) и Бурле (5). Изложение результатов, полученных до 1961 г., дано в обзорах Р. Д. Карникаэля (6) и А. Ф. Леонтьева (7); дальнейшие обобщения принадлежат Ю. Ф. Коробейнику (8). Наша теорема 4 является обобщением в несколько ином направлении.

Теорема 5. *Для того чтобы непрерывный линейный оператор* T: $\mathscr{E}(H_1) \to \mathscr{E}(H_2)$ *коммутировал с оператором* D, *необходимо и достаточно, чтобы он имел вид* $T = \varphi(D) = \Phi^*$ *при* $\varphi \in \mathscr{M}(H_2, H_1)$.

Пусть $\mathfrak{R}(H) \subset [0, 2\pi]$ — объединение всех точек разрыва функции $H(\theta)$ и точек роста функции * $H'(\theta) + \rho^2 \int^{\theta} H(\varphi)\, d\varphi$ и пусть $\mathfrak{R}(H) = \{\lambda\colon \arg\lambda = \theta, \theta \in \mathfrak{R}(H)\}$. Если φ — целая функция не выше нормального типа при порядке ρ с индикатором h_φ, то $\varphi \in \mathscr{M}(H, H + h_\varphi)$ и $\Phi^* = \varphi(D)\colon \mathscr{E}(H + h_\varphi) \to \mathscr{E}(H)$.

Теорема 6. *Для того чтобы уравнение*

$$\varphi(D)\, g = f$$

было разрешимо в $\mathscr{E}(H + h_\varphi)$ *при любой правой части* $f \in \mathscr{E}(H)$, *необходимо и достаточно, чтобы на множестве лучей* $\mathfrak{R}(H)$ *функция* $\varphi(\lambda)$ *имела вполне регулярный рост* **.

Достаточность условий теоремы мы получаем при помощи теоремы Банаха об обратном операторе, необходимость устанавливается на основе одного характеристического свойства функций вполне регулярного роста, найденного В. С. Азариным (9).

При $H(\theta) > 0$ пространство $\mathscr{E}(H)$ с помощью обобщенного преобразования Бореля B по функции Миттаг — Леффлера $E_\rho(\lambda, 1)$, теория которого изложена в (10), изоморфно отображается на пространство $A(G)$ функций, голоморфных в ρ-выпуклой области G с ρ-опорной функцией *** $H(-\theta)$, наделенное открыто компактной топологией. Этот изоморфизм осуществляет оператор $(B^*)^{-1}$: $\mathscr{E}(H) \to A(G)$, а оператор $D_E = (B^*)^{-1} D B^*$ оказывается оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева (по функции $E_\rho(\lambda, 1)$), который был введен в (11). В результате при $H(\theta) > 0$ теоремы 5 и 6 допускают следующие аналитические реализации.

Теорема 7. *Пусть* G_1, G_2 — *плоские* ρ-*выпуклые области с* ρ-*опорными функциями* $H_1(\theta)$, $H_2(\theta)$ *и пусть* $0 \in G_2 \subseteq G_1$. *Для того чтобы непрерывный оператор* T: $A(G_1) \to A(G_2)$ *коммутировал с оператором Гельфонда — Леонтьева* D_E, *необходимо и достаточно, чтобы он имел вид*

$$(Tf)(z) = \int_l (U_\zeta f)(z)\, \gamma(\zeta)\, d\zeta, \qquad f \in A(G_1), \qquad z \in G_2; \tag{2}$$

здесь $\gamma(\zeta)$ — *функция, голоморфная вне фиксированного* ρ-*выпуклого компакта* K, $0 \in K$, ρ-*опорная функция* $h(\theta)$ *которого удовлетворяет неравенству* $h(\theta) \leqslant H_1(\theta) - H_2(\theta)$ *во всех точках, где* $H_1(\theta) < \infty$, $U_\zeta = (B^*)^{-1} E_\rho(\zeta D, 1) B^*$ — *оператор обобщенного сдвига, а контур* l *охватывает компакт* K.

При $\rho = 1$ требование $0 \in G_2$ в условии теоремы можно опустить. Операторы B, D_E и U_ζ превращаются соответственно в классическое преобразо-

---

* В двусторонней окрестности каждой точки роста эта функция отлична от постоянной.

** Теория целых функций вполне регулярного роста изложена в (1).

*** См. (10).

вание Бореля ([1]), дифференцирование d/dz — в сдвиг $f(z)\to f(z+\zeta)$, а оператор (2) — в обычную свертку. В этом случае утверждение теоремы 7 известно ([12–14]).

Теорема 8. *Пусть $\varphi(\lambda)$ — целая функция нормального типа при порядке ρ с индикатором $h(\theta)$ и $h_+(\theta)=\max[h(\theta), 0]$. Пусть G_1, G_2 — плоские ρ-выпуклые области с ρ-опорными функциями $H_1(\theta)$, $H_2(\theta)$, где $H_1(\theta)=H_2(\theta)+h_+(-\theta)$, $H_2(\theta)>0$ и K — компакт с ρ-опорной функцией $h_+(-\theta)$.*

Для того чтобы обобщенное уравнение свертки

$$\int_l (U_\zeta f)(z)\hat{\varphi}(\zeta)\,d\zeta=g(z), \qquad f\in A(G_1), \qquad z\in G_2, \tag{3}$$

в котором $\hat{\varphi}=B\varphi$, а l — замкнутый контур, охватывающий K, имело решение $f\in A(G_1)$ при любой правой части $g\in A(G_2)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\lambda)$ имела вполне регулярный рост на множестве лучей $\mathfrak{R}(H(-\theta))$.

Вопрос о достаточных условиях разрешимости неоднородного уравнения свертки в комплексной области, к которому сводится (3) в случае $\rho=1$, исследовался в работах ([15–17]). Как сообщил автору О. В. Епифанов, он ранее получил теорему 8 в случае $\rho=1$.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
8 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, М., 1956. [2] *А. Робертсон, В. Робертсон*, Топологические векторные пространства, М., 1967. [3] *J. Sebastiaõ, Silva*, Rendiconti di mathem. et delle sue appl., Roma, 5 (14), 388 (1955); Математика, т. 1, 1, 60 (1957). [4] *C. Bourlet*, Ann. Sci. Ecole norm., v. 14 (3), 133 (1897). [5] *S. Pincherlet*, Math. Ann., v. 69, 325 (1897). [6] *R. D. Carmicael*, Bull. Am. Math. Soc., v. 42, № 4, 193 (1936). [7] *А. Ф. Леонтьев*, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, Л., 1964, стр. 648. [8] *Ю. Ф. Коробейник*, УМН, т. 20, в. 5 (125), 208 (1965); Сиб. мат. журн., т. 10, № 3, 549 (1969); т. 14, № 4, 883 (1973); Годишник на ВТУЗ, Матем., т. 8, кн. 3 (1973). [9] *В. С. Азарин*, Теория функций, функц. анализ и их прилож., № 2 (1966). [10] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. [11] *А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев*, Матем. сб., т. 29 (71), № 3 (1951). [12] *М. Ю. Царьков*, Теория функций, функц. анализ и их прилож., в. 11, 89 (1970). [13] *А. В. Братищев, Ю. Ф. Коробейник*, Матем. заметки, т. 12, № 2, 187 (1972). [14] *Ю. Ф. Коробейник*, Годишник на ВТУЗ, Матем., т. 9, кн. 3 (1974); ИАН СССР, сер. мат., т. 30, № 5, 993 (1966). [15] *А. О. Гельфонд*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 38 (1951). [16] *А. Ф. Леонтьев*, Там же, т. 3 (1951). [17] *Ю. Ф. Коробейник*, Матем. сб., т. 74 (118), 535 (1966); Матем. заметки, т. 5, 733 (1969); Матем. сб., т. 80 (112), 52 (1969); В сб. Матем. анализ и его приложения, т. III, Ростов, 1971, стр. 3.