Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

А. В. ИВАНОВ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ХАУСДОРФОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 IV 1974)

Пусть f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, $X=O_1\cup O_2$, где O_1 и O_2 открыты, и известно, что ограничения f на O_1 и O_2 непрерывны. Тогда отображение f непрерывно на всем пространстве X. Однако непрерывность отображения f заменить на θ-непрерывность *, вообще говоря, нельзя. В п. 1 данной работы строится пример отображения, которое θ-непрерывно на двух открытых подмножествах пространства X, но не θ-непрерывно на всем X. Этот пример является также примером слабо θ-непрерывного, но не θ-непрерывного отображения **. В то же время оказывается, что если отображение f θ-непрерывно на замкнутых подмножествах, то оно θ-непрерывно и на их объединении.

Во второй части работы рассматриваются отображения пространств θ-близости.

Сначала дадим несколько определений.

Определение 1 [3]. Хаусдорфово пространство X называется пространством θ-близости, если для всяких двух подмножеств A и B из X имеет место одно из двух соотношений: $A\,\theta\,B$ (A θ-близко к B) или $A\,\bar\theta\,B$ (A θ-далеко от B), причем выполнены следующие аксиомы:

1) $A\,\theta\,B\Rightarrow B\theta A$;
2) $A\,\bar\theta\,B_i,\ i=1,2, \Leftrightarrow A\bar\theta(B_1\cup B_2)$;
3) $\varnothing\,\bar\theta\,X$;
4) $x\,\theta\,y\Leftrightarrow x=y$;
5) $A\,\bar\theta\,B\Rightarrow$ существует такое канонически открытое множество $C\supset A$, что $C\,\bar\theta\,B$ и $A\,\bar\theta\,(X\setminus[C])$;
6) $x\,\theta\,A\Rightarrow$ любые окрестности точки x и множества A пересекаются.

На любом хаусдорфовом пространстве X можно задать максимальную θ-близость: подмножества A и B θ-далеки тогда и только тогда, когда они обладают непересекающимися окрестностями.

Определение 2 [3]. Центрированная система открытых множеств $\tau=\{H\}$ пространства θ-близости X называется θ-системой, если для любого $H\in\tau$ существует такое $H'\in\tau$, что $H'\,\bar\theta\,(X\setminus[H])$. Максимальная θ-система называется θ-концом. В случае максимальной θ-близости θ-концы совпадают с максимальными центрированными системами открытых множеств.

В множестве $b_\theta X_\theta$ всех θ-концов пространства X задана топология, базу которой образуют множества вида O_H, где H — произвольное открытое множество в X и $O_H=\{\tau\,|\,\tau\ni H\}$. Рассмотрим подпространство X_θ пространства $b_\theta X_\theta$, состоящее из θ-концов, касающихся какой-либо точки $x\in X$ (θ-конец η касается точки x, если $x\in\bigcap\limits_{H\in\eta}[H]$). Определено естественное

* Отображение f: $X\to Y$ называется θ-непрерывным, если для любой точки $x\in X$ и любой окрестности $Of(x)$ ее образа $f(x)$ существует такая окрестность Ox, что $f[Ox]\subset[Of(x)]$ (см. [4]).

** Отображение f: $X\to Y$ называется слабо θ-непрерывным, если для любой точки $x\in X$ и для любой окрестности Oy точки $y=f(x)$ существует такая окрестность Ox, что $f(Ox)\subset[Oy]$ (см. [1]).

отображение π_θ: $X_\theta \to X$ подпространства X_θ на X, которое ставит в соответствие θ-концу его точку прикосновения *.

Определение 3 ([3]). Отображение f: $X \to Y$ пространства θ-близости X в пространство θ-близости Y называется θ-близостно непрерывным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $A, B \subset Y, A \,\bar{\theta}\, B \Rightarrow f^{-1}A \,\bar{\theta}\, f^{-1}B$;

2) $A, B \subset Y, A \,\bar{\theta}\, B \Rightarrow \langle f^{-1}[A] \rangle \bar{\theta} \langle f^{-1}[B] \rangle$.

В. В. Федорчуком доказана следующая теорема, которая является обобщением теоремы Ю. М. Смирнова ([2]) о продолжении δ-отображений.

Теорема 1 ([3]). *Пусть f: $X \to Y$ — θ-близостно непрерывное отображение пространства θ-близости X на регулярное пространство θ-близости Y. Тогда существует такое непрерывное отображение f_θ: $b_\theta X_\theta \to b_\theta Y_\theta$ пространства $b_\theta X_0$ на пространство $b_\theta Y_\theta$, что $f_\theta(X_0) \subset Y_\theta$, и коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X_\theta \arrow[r, "f'_\theta"] \arrow[d, "\pi_{\theta X}"'] & Y_\theta \arrow[d, "\pi_{\theta Y}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad *$$

где f_θ' — ограничение f_θ на X_θ.

В п. 2 данной работы строится пример θ-близостно непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, для которого не существует отображения f_θ, т. е. доказывается, что θ-близостной непрерывности f недостаточно для существования отображения f_θ в случае произвольного хаусдорфова пространства Y.

Поскольку пример строится для пространств с максимальной θ-близостью, этот результат можно сформулировать и так:

Существует отображение f: $X \to Y$, удовлетворяющее условиям близостной непрерывности 1) и 2), которое не продолжается до такого непрерывного отображения гиперабсолютов F: $\theta X \to \theta Y$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y_\alpha \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd},$$

где π_X, π_Y — канонические проекции абсолютов X_α, Y_α, а F' — ограничение F на X_α.

1. Пример 1. На отрезке $[0, 1]$ возьмем последовательность точек $\{a_k\}$, монотонно $(a_{k+1} < a_k)$ сходящуюся к нулю. Далее на каждом интервале (a_{k+1}, a_k) возьмем последовательность $\{a_k^i\}$, монотонно $(a_k^i < a_k^{i+1})$ сходящуюся к точке a_k. Положим

$$A_k = (a_{k+1}, a_k) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_k^{2i-1}, a_k^{2i}], \qquad B_k = (a_{k+1}, a_k) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_k^{2i-1}, a_k^{2i}).$$

Определим топологию в пространствах X и Y. Будем считать, что на отрезке $[0, 1]$ задана интервальная топология, усиленная следующим образом:

В пространстве X окрестностями точек a_k являются множества: $U_{a_k}^n = \bigcup_{i=n}^{\infty} [a_k^{2i-}, a_k^{2i}] \cup \{a_k\}$, окрестностями точки 0 — множества $U_0^n =$

---

* Для любой точки $x \in X$ существует θ-конец, который ее касается (см. ([3])).

$=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_k \cup \{0\}$, в пространстве Y окрестности $a_k - V_{a_k}^n = \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} (a_k^{2i-1}, a_k^{2i}) \cup \cup \{a_k\}$, нуля $- V_0^n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \cup \{0\}$. Очевидно, что в пространствах X и Y выполнены аксиомы топологического пространства и, кроме того, X и Y хаусдорфовы.

Возьмем в пространстве X два открытых множества $O_1 = X \setminus \{0\}$, $O_2 = X \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{a_k\}$. Легко проверить, что тождественное отображение f: $X \to Y$ θ-непрерывно на O_1 и O_2.

Однако на всем пространстве X θ-непрерывность в точке 0 нарушается, поскольку замыкание любой окрестности нуля в X содержит точки a_k, а в Y существует окрестность нуля (например, V_0^1), замыкание которой не содержит точек a_k вообще. Таким образом, отображение f не θ-непрерывно на пространстве X.

2. Имеет место следующее необходимое условие, которому должно удовлетворять непрерывное отображение f_θ: $b_\theta X_\theta \to b_\theta Y_\theta$, чтобы диаграмма (*) была коммутативна:

для любого θ-конца $\tau \in b_\theta X_\theta$, любого $H \in \tau$ и любого $T \in f_\theta \tau$ пересечение $H \cap \langle f^{-1}[T] \rangle$ непусто.

Рассмотрим п р и м е р 2. Разобьем множество R рациональных точек интервала (0, 1) на три непересекающихся всюду плотных подмножества (обозначим их A, B, C). Далее множество J иррациональных точек интервала (0, 1) разобьем на шесть непересекающихся всюду плотных подмножеств (A', B', C', AB, AC, BC). Положим $\bar{A} = A' \cup AC \cup AB$, $\bar{B} = B' \cup BC \cup AB$, $\bar{C} = C' \cup AC \cup BC$.

В качестве исходного множества для построения пространств X и Y возьмем интервал (0, 1).

Положим $S^{(\alpha, \beta)} = \{x \mid x \in S,\ \alpha < x < \beta\}$, где S — некоторое подмножество X или Y.

Будем считать, что в пространствах X и Y задана обычная интервальная топология, но, кроме того, в пространстве X объявим открытыми множества $\bar{A}^{(0,1)}$, $\bar{B}^{(0,1)}$, $\bar{C}^{(0,1)}$, $R^{(0,1)}$, в пространстве Y — множества $\bar{B}^{(0,1)}$, $\bar{C}^{(0,1)}$, $\bar{A}^{(0,1)}$.

Окрестностями точек $r \in R$ в Y назовем следующие множества: если $r \in A$, то $Or = \bar{A}^{(\alpha, \beta)}$, $r \in (\alpha, \beta)$; если $r \in B$, то $Or = \bar{B}^{(\alpha, \beta)}$, $r \in (\alpha, \beta)$; если $r \in C$, то $Or = \bar{C}^{(\alpha, \beta)}$, $r \in (\alpha, \beta)$.

Полученные пространства X и Y, очевидно, хаусдорфовы. На X и Y зададим максимальную θ-близость.

Докажем, что тождественное отображение f: $X \to Y$ θ-близостно непрерывно. Достаточно показать, что для любых открытых непересекающихся множеств M и N из Y выполняются следующие соотношения:

1) $f^{-1}M \,\bar{\theta}\, f^{-1}N$; 2) $\langle f^{-1}[M] \rangle \cap \langle f^{-1}[N] \rangle = \varnothing$.

Проверим выполнение соотношения 1). Положим $M_R = M \cap R$, $M_J = M \cap J$, $N_R = N \cap R$, $N_J = N \cap J$. Очевидно, что $f^{-1}M_J \,\bar{\theta}\, f^{-1}N_J$, $f^{-1}M_R \,\bar{\theta}\, f^{-1}N_J$, $f^{-1}M_J \,\bar{\theta}\, f^{-1}N_R$. Покажем, что $f^{-1}M_R \bar{\theta} f^{-1}N_R$, т. е. M_R и N_R имеют в пространстве X непересекающиеся окрестности.

Возьмем $x \in M_R$. Чтобы упростить рассуждения, будем считать, что $x \in A$. Тогда существует такой интервал (α_x, β_x), что $\bar{A}^{(\alpha_x, \beta_x)} \subset M$ и $x \in (\alpha_x, \beta_x)$. Ясно, что никакая точка из N_R не принадлежит интервалу (α_x, β_x), так как любая окрестность любой точки $y \in (\alpha_x, \beta_x)$ пересекается с $\bar{A}^{(\alpha_x, \beta_x)}$, а пересечение $M_R \cap N_R$ пусто. Положим $(\alpha_x', \beta_x') = \left(\dfrac{\alpha_x + x}{2}, \dfrac{\beta_x + x}{2}\right)$. Множества $O_{M_R} = \bigcup\limits_{x \in M_R} (\alpha_x', \beta_x')$ и $O_{N_R} = \bigcup\limits_{x \in N_R} (\alpha_x', \beta_x')$ не пересекаются и являются окрестностями в X множеств M_R и N_R соответственно. Значит, $f^{-1}M_R \bar{\theta} f^{-1}N_R$.

Теперь покажем, что пересечение множеств $\langle f^{-1}[M]\rangle$ и $\langle f^{-1}[N]\rangle$ пусто. Эти множества, очевидно, не пересекаются по J, так как топологии на J_X и J_Y совпадают. Покажем, что $\langle f^{-1}[M]\rangle \cap \langle f^{-1}[N]\rangle \cap R = \emptyset$. Это утверждение эквивалентно следующему; множество $[M] \cap [N]$ не содержит ни одного непустого интервала из R. Предположим противное. Пусть $R^{(\alpha, \beta)} \subset [M] \cap [N]$. Возьмем из интервала (α, β) точку $a \in A$. Любая окрестность этой точки пересекается с M_J, значит, $A^{(\alpha, \beta)} \cap M_J \neq \emptyset$. Поскольку M_J открыто, хотя бы одно из множеств $AC^{(\alpha, \beta)}$ или $AB^{(\alpha, \beta)}$ пересекается с M_J. Положим для определенности, что $AB^{(\alpha, \beta)} \cap M_J \neq \emptyset$. Тогда существует такой интервал $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$, что $AB^{(\alpha_1, \beta_1)} \subset M_J$. Теперь возьмем точку $c \in C$ из интервала (α_1, β_1) и, проведя аналогичные рассуждения, получим, что существует такой интервал $(\alpha_2, \beta_2) \subset (\alpha_1, \beta_1)$, что либо $AC^{(\alpha_2, \beta_2)} \subset M_J$, либо $BC^{(\alpha_2, \beta_2)} \subset M_J$. Для определенности будем считать, что $AC^{(\alpha_2, \beta_2)} \subset M_J$. Итак, мы имеем $AC^{(\alpha_2, \beta_2)} \cup AB^{(\alpha_2, \beta_2)} \subset M_J$. Но так как $M \cap N = \emptyset$, то $N \cap J^{(\alpha_2, \beta_2)} \subset BC^{(\alpha_2, \beta_2)}$, откуда видно, что $R^{(\alpha_2, \beta_2)}$ не содержится в замыкании N, поскольку $[N]$ заведомо не содержит множество $A^{(\alpha_2, \beta_2)}$. Следовательно, $R^{(\alpha, \beta)}$ не содержится в замыкании N. Противоречие.

Итак, отображение f θ-близостно непрерывно. θ-концами в X и Y являются максимальные центрированные системы открытых множеств, так как на X и Y задана максимальная θ-близость. В частности, система $\xi_0 = \{R^{(\alpha, \beta)} \mid \alpha < 1/2,\ \beta > 1/2,\ \alpha, \beta \in [0, 1]\}$ будет θ-системой пространства X. Пусть ξ — θ-конец, мажорирующий эту θ-систему.

Покажем, что для любого θ-конца $\tau \in b_\theta Y_\theta$ существует такое множество $H \in \tau$, что пересечение $\langle f^{-1}[N]\rangle \cap R_X$ пусто. Возьмем произвольный θ-конец $\tau \in b_\theta Y_\theta$. Любое множество $T \in \tau$ пересекается с множеством $\Phi = AB^{(0, 1)} \cup AC^{(0, 1)} \cup BC^{(0, 1)}$, так как Φ всюду плотно в Y. Поскольку $AB^{(0, 1)}$, $BC^{(0, 1)}$, $AC^{(0, 1)}$ открыты, и τ — максимальная центрированная система, хотя бы одно из множеств $AB^{(0, 1)}$, $BC^{(0, 1)}$, $AC^{(0, 1)}$ принадлежит τ. Это множество и будет искомым, поскольку $\langle f^{-1}[AB^{(0, 1)}]\rangle \cap R_X = \langle f^{-1}[AC^{(0, 1)}]\rangle \cap R_X = \langle f^{-1}[BC^{(0, 1)}]\rangle \cap R_X = \emptyset$. Тем самым доказано, что никакое отображение g: $b_\theta X_\theta \to b_\theta Y_\theta$ не удовлетворяет в точке ξ указанному выше необходимому условию, следовательно, не существует такого непрерывного отображения f_θ: $b_\theta X_\theta \to b_\theta Y_\theta$, что коммутативна диаграмма (*).

В заключение автор приносит благодарность В. В. Федорчуку, под руководством которого написана эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *L. Rudolf,* Fund. Math., v. 74, 111 (1972). [2] *Ю. М. Смирнов,* Матем. сб., т. 31 (73), 543 (1952). [3] *В. В. Федорчук,* Матем. сб., т. 76 (118), 4, 513 (1968). [4] *С. В. Фомин,* ДАН, т. 32, № 5, 114 (1941).