Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 4

УДК 517.55+517.522

МАТЕМАТИКА

А. П. ЮЖАКОВ

ОБОБЩЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА НА ПРОИЗВОЛЬНЫЕ НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 V 1974)

Обобщения ряда Лагранжа ([1], стр. 186) (Бурмана — Лагранжа ([2], стр. 394) на многомерный случай рассматривали Стильтьес ([3]), Пуанкаре ([4]), Гуд ([5]), Сак ([6]) и др. (подробную библиографию см. в ([5, 7])). Указанные обобщения дают разложение голоморфной функции $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ в ряд по степеням переменных $w_1, \ldots, w_n$, связанных с $z_1, \ldots, z_n$ уравнениями $z_j - w_j\varphi_j(z_1, \ldots, z_n)=0$, $j=1, \ldots, n$ (по степеням функций $w_j=t_j(z_1, \ldots, z_n)$, $j=1, \ldots, n$, в случае, когда $t_j(z_1, \ldots, z_n)=z_j\psi_j(z_1, \ldots, z_n)$, $\psi_j(0, \ldots, 0)\neq 0$). Ниже (теорема 1) приводятся обобщения разложения Лагранжа на произвольные неявные функции. При некоторых дополнительных предположениях указываются (теорема 2) необходимые и достаточные условия существования однозначной регулярной ветви неявной вектор-функции в вырожденном случае. Дается аналог разложения Лагранжа для этого случая.

Рассмотрим систему уравнений

$$F_j(w, z)=0, \quad j=1, \ldots, n, \tag{1}$$

где F_j — голоморфные функции переменных $w=(w_1, \ldots, w_m)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в окрестности точки $(0, 0)\in C^{m+n}_{(w,z)}$, $F_j(0, 0)=0$, $\Phi(w, z)$ — голоморфная функция в окрестности точки $(0, 0)$.

1. Предположим, что якобиан $\partial(F)/\partial(z)\,|_{(0,0)}=\partial(F_1, \ldots, F_n)/\partial(z_1, \ldots, z_n)\,|_{(0,0)}$ не равен нулю. Не теряя общности, можно считать, что $\partial F_j(0, 0)/\partial z_k=\delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронекера). Обозначим

$$\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad \beta_j=0, 1, \ldots, \quad |\beta|=\beta_1+\ldots+\beta_n, \quad \beta!=\beta_1!\ldots\beta_n!;$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta}=\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z_1^{\beta_1}\ldots\partial z_n^{\beta_n}}, \quad g^\beta=g_1^{\beta_1}\ldots g_n^{\beta_n}, \quad g_j(w, z)=F_j(w, z)-z_j.$$

При сделанных предположениях имеет место

Теорема 1. *Функция $\Phi(w, \varphi(w))$, где $z=\varphi(w)$, $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — неявная вектор-функция, определяемая системой (1) в окрестности точки $(0, 0)$, выражается следующим равномерно и абсолютно сходящимся в окрестности точки $O\in C_w^m$ функциональным рядом:*

$$\Phi(w, \varphi(w))=\sum_{|\beta|\geq 0}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta}\left[\Phi(w, z)g^\beta(w, z)\frac{\partial(F)}{\partial(z)}\right]_{z=0} \tag{2}$$

соответственно степенным рядом

$$\Phi(w, \varphi(w))=\sum_{|\alpha|\geq 0}d_\alpha w^\alpha=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m=0}d_{\alpha_1\ldots\alpha_m}w_1^{\alpha_1}\ldots w_m^{\alpha_m}, \tag{3}$$

где

$$d_\alpha=\sum_{|\beta|\leq 2|\alpha|}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial w^\alpha\,\partial z^\beta}\left[\Phi(w, z)g^\beta(w, z)\frac{\partial(F)}{\partial(z)}\right]\Big|_{(0,0)}. \tag{4}$$

Замечание 1. При $\Phi(w, z)\equiv z_j$ формулы (2), (3), (4) дают представление неявных функций $z_j=\varphi_j(w)=\varphi_j(w_1, \ldots, w_m)$, $j=1, \ldots, n$, определяемых системой (1) в окрестности точки (0, 0), в виде функциональных (соответственно степенных) рядов.

Замечание 2. Обобщения разложения Лагранжа (Бурмана — Лагранжа), рассмотренные в ([3-7]), получаются из формул (2)—(4) как частные случаи.

2. Предположим, что якобиан $\left.\dfrac{\partial(F)}{\partial(z)}\right|_{(0,0)}=0$ и однородный многочлен наименьшей степени в разложении функции F_j в точке (0, 0) в ряд по однородным многочленам имеет вид $z_jP_j(w, z)$, $P_j(w, 0)\neq 0$, $j=1, \ldots, n$. Пусть $w^{\lambda(j)}=w_1^{\lambda_{j1}}\ldots w_m^{\lambda_{jm}}$ — старший член полинома $P_j(w, 0)$ при лексикографическом расположении его членов (для любого члена $a_{j\alpha}w^\alpha$ многочлена $P_j(w, 0)$ выполняются условия: $\alpha_1=\lambda_{j1}, \ldots, \alpha_{k-1}=\lambda_{j,k-1}$, $\alpha_k<\lambda_{jk}$ для некоторого k, $1\leqslant k<m$). Коэффициент при $w^{\lambda(j)}$ предполагается равным 1. Обозначим

$$g_j(w,z)=F_j(w,z)-z_jw^{\lambda(j)},\qquad \beta+I=(\beta_1+1,\ldots,\beta_n+1),$$

$$\lambda(\beta+I)=\left(\sum_{j=1}^n\lambda_{j1}(\beta_j+1),\ldots,\sum_{j=1}^n\lambda_{jm}(\beta_j+1)\right),$$

$$\gamma_m=\{\omega\in C^m:|\omega_j|=\delta,\ j=1,\ldots m\}.$$

$$\Gamma_n=\{\zeta\in C^n:|\zeta_j|=\varepsilon,\ j=1,\ldots,n\}.$$

где числа $\delta<0$, $\varepsilon>0$ выбраны так, чтобы функции были регулярны в окрестности точки (0, 0), содержащей цикл $\gamma_m\times\Gamma_n$. При этих условиях имеет место

Теорема 2. *Для того чтобы существовала система голоморфных функций*

$$z_j=\varphi_j(w)=\varphi_j(w_1, \ldots, w_m),\quad j=1, \ldots, n, \tag{5}$$

удовлетворяющая системе (1) *и условиям*

$$\varphi_j(0)=0,\quad \frac{\partial\varphi_j(0)}{\partial w_k}=0,\quad j=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,m,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{|\beta|\geqslant 0}\frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi i)^{m+n}}\int\limits_{\gamma_m\times\Gamma_n}\frac{\zeta_jg^\beta(\omega,\zeta)\dfrac{\partial(F)}{\partial(\zeta)}d\omega\wedge d\zeta}{\zeta^{\beta+I}\,\omega^{\lambda(\beta+I)+\alpha+I}}=0 \tag{6}$$

$$d\omega=d\omega_1\wedge\ldots\wedge d\omega_m,\quad d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n,\quad j=1, \ldots, n,$$

для всех целочисленных мультииндексов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, *для которых* $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_m>1$ *и хотя бы для одного* j, $j=1, \ldots, n$, $\alpha_j<0$ *(в суммах* (6) *и* (8) *(см. ниже), лишь конечное число членов отлично от нуля).*

При выполнении условий (6) *коэффициенты разложения в степенной ряд*

$$\Phi(w,\varphi(w))=\sum_{|\alpha|\geqslant 0}d_\alpha w^\alpha, \tag{7}$$

где $\Phi(w, z)$ — *функция, голоморфная в окрестности точки* (0, 0), $z=\varphi(w)$, $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — *функции системы* (5), *определяются формулой*

$$d_\alpha=\sum_{|\beta|\geqslant 0}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta![\lambda(\beta+I)+\alpha]!}\frac{\partial^{|\beta|+|\lambda(\beta+I)+\alpha|}}{\partial z^\beta\,\partial w^{\lambda(\beta+I)+\alpha}}\left[\Phi g^\beta\frac{\partial(F)}{\partial(z)}\right]\Bigg|_{(0,0)}. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 3. При $m=1$ условия (6) выполняются всегда, так как множество индексов $\alpha=\alpha_1$, для которых $|\alpha|=\alpha_1>1$ и $\alpha_j=\alpha_1<0$, пусто.

З а м е ч а н и е 4. Система (5) при выполнении условий (6) определяет регулярную неприводимую компоненту ростка аналитического множества, определяемого системой (1) в точке (0, 0). Разложения в степенные ряды функций (5) получаются из формул (7), (8) при $\Phi(w, z)\equiv z_j$.

В основе доказательства теорем 1, 2 лежит одно обобщение теоремы о логарифмическом вычете на функции многих комплексных переменных (см. [7], теорема 3), согласно которому в условиях теоремы 1 функция $\Phi(w, \varphi(w))$ в окрестности точки (0, 0) может быть представлена в виде

$$\Phi(w, \varphi(w))=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{\Phi(w,\zeta)\dfrac{\partial(F)}{\partial(\zeta)}d\zeta}{F_1(w,\zeta)\ldots F_n(w,\zeta)}. \tag{9}$$

Из интегрального представления (9) получается разложение (2), а из последнего разложения (3), (4). В условиях теоремы 2 разложение вида (9) получается уже лишь в некоторой m-круговой области. Причем условия (6), оказывается, необходимы и достаточны для того, чтобы функция, определяемая интегралом (9), при $\Phi(w, z)\equiv z_j$ продолжалась на полную m-круговую область.

П р и м е р. Выделить однозначную ветвь декартова листа $w^3-3wz+z^3=0$ в точке (0, 0), касательную комплексной прямой $z=0$. По формулам (7), (8) при $m=n=1$ получается для этой ветви представление

$$z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3k)!}{3^{3k+1}k!(2k+1)!}w^{3k+2}.$$

Институт физики им. Л. В. Киренского
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
20 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, т. 1, М., 1963. [2] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*, Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958. [3] *T. J. Stieltjes*, Ann. sci. Ecole Norm. sup., Ser. 3, 2 (1885). [4] *H. Poincare*, Acta Math., v. 9 (1887). [5] *J. I. Good*, Proc. Cambridge Phil. Soc. (Math. and Phys. Sci.), v. 56, 4 (1960). [6] *R. A. Sack*, J. Soc. Ind. Appl. Math., v. 13, 4 (1965). [7] *А. П. Южаков, А. В. Куприков*, В Сб. Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных, Красноярск, 1973.